DEA de mathématiques
— Université de Paris-Sud XI —
Superalgèbres de Lie et groupes quantiques associés

Jérôme Levie sous la direction de Marc Rosso

Résumé

Après une introduction fournie au sujet, on étudie en détail la construction par H. Yamane d'« algèbres enveloppantes quantifiées » $\mathcal{U}_h(\mathcal{G})$ pour les superalgèbres de Lie contragrédientes classiques et affines. On montre ensuite que ces mêmes objets peuvent être obtenus pour la méthode déjà utilisée par M. Rosso pour obtenir de manière « naturelle » les algèbres enveloppantes quantifiées $\mathcal{U}_q\mathfrak{g}$, où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple ou affine.

Table des matières

Introduction

La théorie des groupes quantiques, venue de la physique et des méthodes de diffusion quantique inverse (QISM), s'est maintenant consolidée. On sait notamment, pour chaque algèbre de Lie semi-simple ou affine, construire une déformation plus ou moins « canonique » de son algèbre enveloppante universelle. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt a été généralisé et, dans quelques cas, une explicitation de la R-matrice est connue. De même la théorie des représentations de tels objets est, pour le cas semi-simple, déjà bien comprise. Pour les superalgèbres de Lie, en revanche, la situation jusqu'il y a peu était peu claire : des généralisations existaient, mais pour des cas particuliers, ou construites de manière relativement artificielle, et dont on ne savait pas toujours si elles étaient compatibles entre elles.

Tout récemment cependant, M. Rosso a fourni, grâce aux algèbres de battage « quantiques », une vision d'ensemble, plus « naturelle », des algèbres enveloppantes quantifiées des algèbres de Lie contragrédientes de dimension finie ou affines (de Kac-Moody). Ce mémoire se propose, outre de fournir une introduction relativement pédestre au double sujet des groupes quantiques et des superalgèbres de Lie, de commencer à explorer les possibilités de généralisation de cette construction au cadre supersymétrique — c'est-à-dire aux superalgèbres de Lie classiques ou affines. Nous montrerons que les objets ainsi construits coïncident avec ceux proposés par H. Yamane en 1994, et peuvent à bon droit prétendre au titre d'« algèbres enveloppantes quantifiées » des superalgèbres de Lie contragrédientes classiques (souvent nommées B.S.A., Basic SuperAlgebras) et affines.

1 Algèbres et superalgèbres de Lie

Soit R un anneau commutatif unitaire. Nous noterons $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ le groupe à deux éléments et $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On notera aussi $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (resp. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$) l'ensemble des entiers non nuls (resp. strictement positifs).

1.1 Algèbres de Lie

Bien que les définitions d'une algèbre de Lie sur un anneau commutatif unitaire R soient les mêmes que sur un corps, nous nous plaçons, en vue du développement de la théorie des algèbres de Lie semi-simples [2, 4, 5, 3, 7, 12], directement sur un corps k (en attendant d'autres particularisations).

1.1.1 Premières définitions

Une k-algèbre sera par la suite un k-espace vectoriel A muni d'un produit $M_A : A \otimes A \to A$ associatif et d'une unité $1_A \in A$.

Définition 1. *Une k-algèbre de Lie est un k-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application k-linéaire antisymétrique $[.,.] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ vérifiant l'identité de Jacobi*

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \quad \forall a, b, c \in \mathfrak{g}.$$

Un morphisme f entre deux k-algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ est une application k-linéaire $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ telle que, $\forall g, g' \in \mathfrak{g}$, $f([g, g']) = [f(g), f(g')]$.

Une représentation d'une k-algèbre de Lie dans un k-espace vectoriel M est une application $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(M)$ telle que, pour tous $g, g' \in \mathfrak{g}$ et $x \in M$,

$$\rho([g, g'])(x) = \rho(g)(\rho(g')(x)) - \rho(g')(\rho(g)(x)).$$

Dans ce cadre, l'identité de Jacobi exprime le fait que la représentation adjointe $\rho = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}) : g \mapsto \big(h \mapsto [g, h]\big)$ est bien une représentation.

Si A est une k-algèbre (associative unitaire), on lui associe une k-algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(A)$, pour le crochet

$$[a, b] = ab - ba \quad \forall a, b \in A.$$

Définition 2. *Un sous-k-espace vectoriel $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ est appelé une sous-k-algèbre si $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$, un idéal si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{b}$ est une sous-k-algèbre de $\mathfrak{g}$, on appelle normalisateur de $\mathfrak{b}$ la plus grande sous-k-algèbre $N(\mathfrak{b})$ de $\mathfrak{g}$ dans laquelle $\mathfrak{b}$ est un idéal.*

On définit le centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{g \in \mathfrak{g} | [g, h] = 0 \ \forall h \in \mathfrak{g}\}$, la suite dérivée

$$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ \mathfrak{g}^{(i+1)} = [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}], \ i \in \mathbb{N}_0,$$

et la suite centrale descendante

$$\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \ \mathfrak{g}^i], i \in \mathbb{N}, \ \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}.$$

Définition 3. *Une k-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite simple si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$ et si elle n'admet pas d'idéaux non triviaux. Elle est dite semi-simple si son centre est trivial, nilpotente s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{g}^n = 0$, résoluble s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$.*

Il ressort des définitions que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}^{(n)} \subset \mathfrak{g}^n$, et donc que toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble.

Le concept suivant est d'une importance capitale pour la classification des algèbres de Lie simples.

Définition 4. *Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie. La forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est la forme k-bilinéaire $K(x,y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y))$, $\forall x, y, \in \mathfrak{g}$.*

1.1.2 Matrices de Cartan, Systèmes de racines

Dans la suite de cette section, le corps k sera supposé de caractéristique nulle et le k-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ de dimension finie.

Définition 5. *Une matrice de Cartan est une matrice $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ de déterminant strictement positif, telle que $a_{i,i} = 2$, $a_{i,j} \in -\mathbb{N}$ si $i \neq j$, et $a_{i,j} = 0$ si et seulement si $a_{j,i} = 0$. Elle est dite symétrisable s'il existe une matrice diagonale*

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

à coefficients entiers strictement positifs telle que $B = DA$ soit symétrique.

Définition 6. *Soit V un k-espace vectoriel. Pour $\alpha \in V$ et $\ell \in V^*$ on définit la réflexion de V par $s_{\alpha,\ell}(x) = x - \ell(x)\alpha$ pour $x \in V$.*

Une partie finie R de $V \setminus \{0\}$ est appelée un système de racines si

- *Le k-espace vectoriel V est engendré par R sur k,*
- *Pour tout $\alpha \in R$, il existe $\check{\alpha} \in V^*$ tel que $<\alpha, \check{\alpha}>= 2$ et $s_{\alpha,\check{\alpha}}(R) = R$,*
- *Pour tous $\alpha, \beta \in R$, $\check{\beta}(\alpha) \in \mathbb{Z}$.*

Un système de racines R est dit réduit si $\mathbb{Z}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\} \quad \forall \alpha \in R$.

Un système de racines R dans V est dit isomorphe à un système de racines R' dans V' s'il existe un isomorphisme $f : V \to V'$ tel que $f(R) = R'$. Un système de racines R dans $V \oplus V'$ est appelé somme directe des systèmes de racines $S \subset V$ et $S' \subset V'$ si $R = S \bigsqcup S'$. Un système de racines est dit irréductible s'il ne peut s'écrire comme somme directe de deux systèmes de racines.

Si R est un système de racines, le groupe de Weyl de R est le sous-groupe $W(R)$ de $A(R) = \{s \in \mathrm{Aut}(V) \,|\, s(R) = R\}$ engendré par les $s_\alpha = s_{\alpha,\check{\alpha}}$, $\alpha \in R$. Une partie $B \subset R$ sera appelée base du système de racines R dans V si c'est une base de V et que tout $\alpha \in R$ s'écrit de manière unique comme combinaison k-linéaire à coefficients entiers d'éléments de B.

Un système de racines possède toujours une base. En effet, il suffit de prendre, pour base duale, les formes linéaires définies par les murs d'une chambre[1] pour l'ensemble d'hyperplans $\mathcal{H} = \{H_\alpha \,|\, \alpha \in R\}$, où $H_\alpha = \{x \in V | s_{\alpha,\check{\alpha}}(x) = x\}$. En outre, le groupe de Weyl $W(R)$ agit simplement transitivement sur les bases de R.

[1]Si E est un espace affine et $\mathcal{H}$ un ensemble localement fini d'hyperplans de E, on appelle facette une classe d'équivalence de E pour la relation $x \sim y \iff \forall H \in \mathcal{H} \quad x, y \in H$ ou x, y « du même côté » de H. Une chambre est une facette qui n'est contenue dans aucun hyperplan de $\mathcal{H}$. Les faces d'une chambre sont les facettes contenues dans son adhérence et dont le support est un hyperplan ; ces derniers hyperplans sont appelés les murs de la chambre [5].

Une base B permet de définir un ordre sur R : si $\alpha, \beta \in R$, on dira que $\alpha \leq \beta$ si $\beta - \alpha$ est combinaison linéaire à coefficients entiers positifs d'éléments de B. Si B est une base et $\alpha \in R \subset \mathbb{Z}B$ une racine, on montre que α est une combinaison linéaire d'éléments de B avec des coefficients de même signe. On note $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ les éléments de B et R_+ (resp. R_-) les ensembles d'éléments positifs (resp. négatifs), *id est* les éléments de R qui sont combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs (resp. négatifs) des α_i, $1 \leq i \leq n$. Alors $R = R_+ \sqcup R_-$ (pour la base associée à la chambre C, on notera $R_+(C)$ et $R_-(C)$ ces ensembles). De plus, R possède une plus grande racine (par rapport à la base B), c'est-à-dire une racine $\alpha = \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$ telle que, pour toute racine $\beta = \sum_{i=1}^n n_i \alpha_i \in R$, on a $n_i \leq m_i \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$.

On définit une forme bilinéaire symétrique sur V par

$$(x \,|\, y) = \sum_{\alpha \in R} < \check{\alpha}, x >< \check{\alpha}, y >, \quad \forall x, y \in V.$$

Cette forme est non dégénérée, et $A(R)$-invariante. Si B est une base de R, on définit alors la matrice de Cartan associée au système de racines R (et à la base B) $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $n = \dim(V)$ est le rang de R et où $a_{i,j} =< \alpha_i, \check{\alpha}_j >= \frac{2(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)}$. Notons qu'on est alors dans le cas symétrisable et qu'on peut prendre, en guise de matrice D, $d_k = (\alpha_k|\alpha_k)$, $1 \leq k \leq n$, puisqu'on a bien

$$d_i a_{i,j} = d_j a_{j,i} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

1.1.3 Décomposition radicielle d'une algèbre de Lie

Définition 7.
- *Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$ égale à son normalisateur.*
- *Une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre résoluble égale à son normalisateur.*

Remarquons que, si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, c'est une sous-algèbre abélienne maximale. En caractéristique 0, les sous-algèbres de Cartan d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ont même dimension (appelée rang $(\mathfrak{g})$). Quand $k = \bar{k}$, elles sont isomorphes.

Définition 8. *Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie semi-simple. Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est dite déployable si $\forall x \in \mathfrak{h}$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ est triangularisable. S'il existe une telle sous-algèbre, $\mathfrak{g}$ est dite déployable et le couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est appelé une algèbre de Lie semi-simple déployée.*

Lorsque $k = \bar{k}$ (en particulier quand $k = \mathbb{C}$), toute sous-algèbre de Cartan est déployable. Sous l'action (adjointe) d'une sous-algèbre de Cartan déployable $\mathfrak{h}$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ se décompose donc en sous-espaces propres

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{g \in \mathfrak{g} \,|\, [h, g] = \alpha(h) g \quad \forall h \in \mathfrak{h}\},$$

où $\alpha \in \mathfrak{h}^*$.

Si le sous-espace propre $\mathfrak{g}_\alpha = \{g \in \mathfrak{g} \,|\, \forall h \in \mathfrak{h} \quad [h, g] = \alpha(h) g\}$ est non trivial, un élément $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ est appelé racine de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. L'ensemble des racines est noté $R(\mathfrak{g})$.

Proposition 1. *Soient $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une algèbre de Lie déployée, $R(\mathfrak{g})$ l'ensemble de ses racines. Alors $R(\mathfrak{g})$ est un système de racines réduit dans $\mathfrak{h}^*$.*

On a alors la décomposition radicielle $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha \right)$.

1.1.4 Classification des algèbres de Lie simples

On va étudier la classe des algèbres de Lie semi-simples de dimension finie sur un corps $k = \bar{k}$. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et $R = R(\mathfrak{g})$ son système de racines. Si S est un sous-ensemble de R, on définit $\mathfrak{g}_S = \sum_{\alpha \in S} \mathfrak{g}_\alpha$.

Proposition 2. *Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*
- *La sous-algèbre $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$.*
- *La sous-algèbre $\mathfrak{b}$ est maximale parmi les sous-algèbres résolubles de $\mathfrak{g}$.*
- *On peut écrire $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_S$, avec S une partie de R telle que $S \cap (-S) = \emptyset$ et $S \cup (-S) = R$.*

Une partie S de R vérifie $S \cap (-S) = \emptyset$ et $S \cup (-S) = R$ si et seulement s'il existe une chambre C de $\mathfrak{h}$ telle que $S = R_+(C)$ (et donc S est une base de R). Les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$ sont donc en bijection avec les bases du système de racines R, donc avec ses chambres C et avec son groupe de Weyl $W(R)$.

Si on a choisi une base de R (donc une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$), on a la décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, où $\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{n}_- = \sum_{\alpha \in R_-} \mathfrak{g}_\alpha$.

On note alors $P = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ le $\mathbb{Z}$-module des poids, engendré par les racines simples. On note aussi $P_+ = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{N}\alpha_i$ et $P_- = -P_+$.

Théorème 1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Les conditions suivantes sont équivalentes.*
- *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple.*
- *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal abélien non trivial.*
- *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est le quotient d'une algèbre de Lie par son radical.*
- *Toute représentation de $\mathfrak{g}$ est complètement réductible, c'est-à-dire se décompose en somme directe de représentations irréductibles.*
- *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est le produit d'algèbres de Lie simples.*
- *La forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est non dégénérée.*

Notons également qu'une forme bilinéaire symétrique invariante non dégénérée K sur une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ est unique à un facteur près et W-invariante. Sa restriction à $\mathfrak{h}$ est non dégénérée[2] et $K(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = \{0\}$ si $\alpha + \beta \neq 0$, les sous-espaces $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ étant en dualité parfaite. Dans la suite, pour toute racine $\alpha \in R$, H_α désignera l'unique élément de $\mathfrak{h}_\alpha$ tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$.

Définition 9. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Une famille $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$ est appelée un système de Chevalley de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ si, $\forall X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$, et si l'application ν déterminée par $\nu|_{\mathfrak{h}} = -I_{\mathfrak{h}}$ et $\nu(X_\alpha) = X_{-\alpha}$ est un isomorphisme.*

Toute algèbre de Lie semi-simple déployée possède un système de Chevalley. Le théorème suivant ramène la classification des algèbres de Lie semi-simples à celle des systèmes de racines.

Théorème 2.
- *La matrice de Cartan A d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est indépendante du choix d'une sous-algèbre de Cartan et d'une sous-algèbre de Borel.*

[2] Un calcul montre que cette forme coïncide avec celle définie précédemment.

– *Le groupe des automorphismes élémentaires* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ *(produits finis de* $e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x}$ *avec* x *nilpotent) opère transitivement sur les couples* $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ *formés d'une sous-algèbre de Cartan et d'une sous-algèbre de Borel.*
– *Pour tout système de racines réduit* R*, il existe une algèbre de Lie semi-simple déployée* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *dont* R *est l'ensemble des racines.*
– *Une algèbre de Lie semi-simple déployée est simple si et seulement si son système de racines est irréductible.*
– *Deux algèbres de Lie semi-simples sont isomorphes si et seulement si leurs systèmes de racines sont isomorphes.*

Une telle k-algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A)$ est déterminée par sa matrice de Cartan A. Elle peut être munie d'une $\mathbb{Z}$-graduation, dite principale, en fixant le degré de $H \in \mathfrak{h}$ à 0 et celui des e_i et f_i à 1. Pour cette graduation, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée (*id est* telle que le crochet est une application homogène de degré 0, voir la section 1.2.1).

Définition 10. *Une* k*-algèbre de Lie locale est un* k*-espace vectoriel* $\mathbb{Z}$*-gradué* $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{-1} \oplus \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{t}_1$ *(avec les autres* $\mathfrak{t}_i$ *triviaux) muni d'une application* k*-bilinéaire graduée* $[.,.] \ : \ \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}$ *antisymétrique vérifiant l'identité de Jacobi.*

La trivialité des espaces $\mathfrak{t}_i$ pour $i \notin \{-1, 0, 1\}$ implique que les seules applications $[.,.]\big|_{\mathfrak{t}_i \times \mathfrak{t}_j} \ : \ \mathfrak{t}_i \times \mathfrak{t}_j \to \mathfrak{t}_{i+j}$ non triviales sont celles avec $-1 \leq i, j \leq 1$ et $|i+j| \leq 1$.

Définition 11. *Si* $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$ *est une algèbre de Lie* $\mathbb{Z}$*-graduée, on appelle partie locale de* $\mathfrak{g}$ *le sous-espace vectoriel gradué* $\mathfrak{g}_{\mathrm{loc}} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.

Comme il se doit, la partie locale [17, 21] d'une algèbre de Lie est une algèbre de Lie locale munie de la restriction du crochet de Lie. À partir d'une matrice de Cartan $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on peut définir une algèbre de Lie locale $\mathfrak{t}(A)$, en posant $\mathfrak{t}(A)_{-1} = \bigoplus_{i=1}^{n} k e_i$, $\mathfrak{t}(A)_0 = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{t}(A)_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} k f_i$, avec le crochet déterminé par les relations de Weyl

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [e_i, f_j] = \delta_{i,j} h_i;$$
$$[h_i, e_j] = a_{i,j} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{i,j} f_j, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

On peut également reconstruire l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A)$ à partir de sa partie locale $(\mathfrak{g}(A))_{\mathrm{loc}} = \mathfrak{t}(A)$. De manière plus explicite, on considère $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$, l'algèbre engendrée par les e_i, f_i, $1 \leq i \leq n$ et $\mathfrak{h}$, avec les relations de Weyl, et on quotiente par le plus grand idéal $\mathfrak{r}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ intersectant $\mathfrak{h}$ trivialement. En général, une algèbre de Lie obtenue par cette construction est appelée contragrédiente[3].

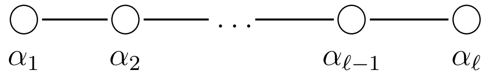
L'avantage de cette construction est qu'elle se généralise aux algèbres de Kac-Moody et aux superalgèbres. Dans le cas qui nous occupe pour l'instant, on peut obtenir une définition explicite par générateurs et relations, en prenant les générateurs dits de Chevalley $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ (engendrant respectivement $\mathfrak{n}_+$ et $\mathfrak{n}_-$) et en rajoutant aux relations de Weyl les relations de Serre

$$(\mathrm{ad}(e_i))^{1-a_{i,j}}(e_j) = (\mathrm{ad}(f_i))^{1-a_{i,j}}(f_j) = 0; \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

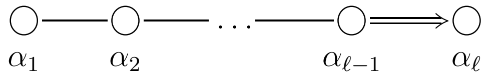
[3]Kac [18] a obtenu une classification des algèbres de Lie graduées simples irréductibles de croissance finie sur un corps algébriquement clos.

Voici la classification des systèmes de racines réduits irréductibles. Ceux-ci sont déterminés, modulo le groupe de Weyl, par leur matrice de Cartan (et la déterminent). À ceci près, celle-ci est donc représentée par un unique diagramme de Dynkin. Chaque cercle représente une racine simple, deux cercles i et j sont liés si et seulement si $a_{i,j} \neq 0$. Si $a_{i,j} = -1$, ces cercles ne sont liés que par une simple arête, si $a_{i,j} = -2$, ils sont liés par deux arêtes et une flèche pointant vers j, et, si $a_{i,j} = -3$, ils sont liés par trois arêtes et une flèche pointant vers j.

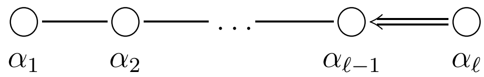
A_ℓ



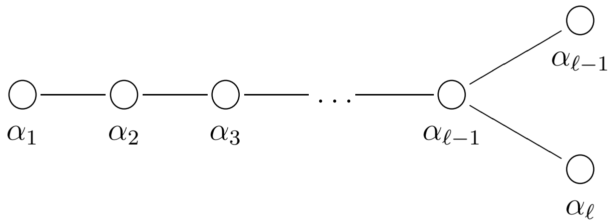
B_ℓ



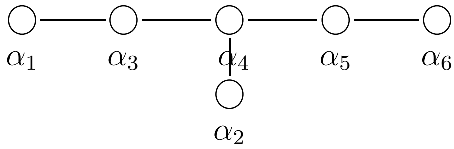
C_ℓ



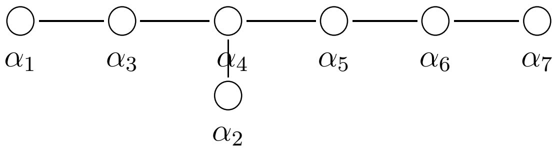
D_ℓ



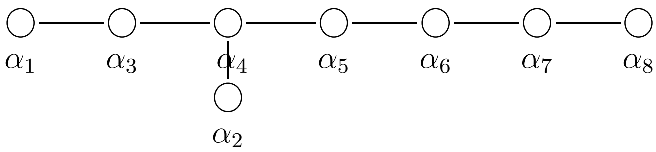
E_6



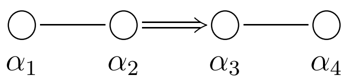
E_7



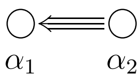
E_8



F_4



G_2



1.2 Superalgèbres de Lie, matrices de Cartan et diagrammes de Dynkin

1.2.1 Filtrations et graduations

On travaille à nouveau avec un anneau R [42, 19]. Soient Δ un monoïde additif et $M = \bigoplus_{\delta\in\Delta} M_\delta$ un R-module Δ-gradué. Si $a \in M_\alpha$, on dit que a est un élément homogène de M et on note $\delta a = \alpha$ son degré. Un sous-module N de M est appelé un sous-module gradué si $N = \bigoplus_{\delta\in\Delta}(N \cap M_\delta)$. Si deux R-modules M et M' sont Δ-gradués, leur produit tensoriel possède une Δ-graduation appelée graduation totale $M \otimes M' = \bigoplus_{\delta\in\Delta}(M \otimes M')_\delta$, où

$$(M \otimes M')_\delta = \bigoplus_{\substack{\beta,\gamma\in\Delta \\ \beta+\gamma=\delta}} M_\beta \otimes M'_\gamma.$$

Une R-algèbre Δ-graduée est un R-module Δ-gradué $A = \bigoplus_{\delta\in\Delta} A_\delta$ muni d'un produit Δ-gradué $M\ :\ A \otimes A \to A$ (c'est-à-dire qu'on a $A_\alpha A_\beta \subset A_{\alpha+\beta}$ pour tous $\alpha, \beta \in \Delta$[4]). La série de Poincaré de l'algèbre graduée A est alors

$$P_A(t) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \dim(A_i)\, t^i.$$

Si V et W sont des R-modules Δ-gradués, une application R-linéaire $f\ :\ V \to W$ est dite homogène de degré $\xi \in \Delta$ si $f(V_\delta) \subset W_{\delta+\xi}$, $\forall \delta \in \Delta$. Ceci définit une Δ-graduation sur l'ensemble des applications R-linéaires de V

dans W $\mathrm{Hom}(V,W) = \bigoplus_{\delta\in\Delta} (\mathrm{Hom}(V,W))_\delta$, où

$$(\mathrm{Hom}(V,W))_\delta = \{f \in \mathrm{Hom}(V,W)\,|f \text{ est homogène de degré } \delta\}.$$

En particulier, l'algèbre d'endomorphismes d'un R-module Δ-gradué est également Δ-graduée

$$\mathrm{End}(V) = \bigoplus_{\delta\in\Delta}(\mathrm{End}(V))_\delta, \text{ où}$$

$$\mathrm{End}(V)_\delta = \{A \in \mathrm{End}(V)\,|\, A(V_\alpha) \subset V_{\alpha+\delta}\ \forall\alpha \in \Delta\}.$$

Posons maintenant $\Delta = \mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$). Une R-algèbre A est dite filtrée si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, où les A_n sont des sous-modules de A tels que $\forall i, j \in \mathbb{N}$ (resp. $\forall i, j \in \mathbb{Z}$) $A_i.A_j \subset A_{i+j}$. On définit alors le gradué associé à cette R-algèbre comme étant la R-algèbre graduée $\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{gr}_n(A)$ (resp. $\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}_n(A)$), où $\mathrm{gr}_n(A) = A_n/A_{n-1}\ \forall n \in \mathbb{N}_0$ et $\mathrm{gr}_0(A) = A_0$ (resp. $\mathrm{gr}_n(A) = A_n/A_{n-1}\ \forall n \in \mathbb{Z}$).

[4]On parle de graduation complète lorsque $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$ pour tous $\alpha, \beta \in \Delta$.

Dimension de Gelfand-Kirillov

Définition 12. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie*[5] *sur un corps k, soit S un sous-ensemble fini de $\mathcal{G}$. On note $\mathrm{d}(S,n)$ la dimension [26, 9] du sous-espace vectoriel engendré par les commutateurs de longueur au plus n formés d'éléments de S. La croissance de $\mathcal{G}$, ou dimension de Gelfand-Kirillov, est alors définie par*

$$\mathrm{d}(\mathcal{G}) = \sup_{\substack{S\subset\mathcal{G}\\ |S|<\infty}} \left[\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln(d(S,n))}{\ln(n)}\right].$$

Si la croissance d'une sous-algèbre ou d'une algèbre-quotient de $\mathcal{G}$ est infinie, alors $\mathrm{d}(\mathcal{G}) = \infty$. Si $\mathcal{G} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_n$ est une algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée, on a

$$\mathrm{d}(\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\sum_{k=-n}^{n} \dim \mathcal{G}_k\right)}{\ln(n)}.$$

1.2.2 Définition et propriétés de base des superalgèbres de Lie

Replaçons-nous sur un corps k, et rappelons la définition d'une superalgèbre de Lie [42, 19, 20].

Définition 13. *Une k-superalgèbre de Lie est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$ muni d'une opération k-bilinéaire $\mathbb{Z}_2$-graduée $[.,.] : \mathcal{G}\times\mathcal{G} \to \mathcal{G}$, appelée supercrochet de Lie, vérifiant, $\forall a \in G_i,\ \forall b \in G_j,\ \forall c \in G_k,\ \forall i,j,k \in \mathbb{Z}_2$,*

$$[a,b] + (-1)^{ij}[b,a] = 0;$$

$$(-1)^{ik}[a,[b,c]] + (-1)^{ij}[b,[c,a]] + (-1)^{jk}[c,[a,b]] = 0.$$

Cela s'exprime d'une manière équivalente en disant que, dans la $\mathbb{Z}_2$-graduation $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$, $\mathcal{G}_{\bar{0}}$ est une algèbre de Lie, $\mathcal{G}_{\bar{1}}$ est un $\mathcal{G}_{\bar{0}}$-module, et qu'il existe un morphisme de $\mathcal{G}_{\bar{0}}$-modules $f\ \left(\simeq [.,.]|_{\mathcal{G}_{\bar{1}}\times\mathcal{G}_{\bar{1}}}\right)\ :\ S^2\mathcal{G}_{\bar{1}} \to \mathcal{G}_{\bar{0}}$ vérifiant

$$[f(x,y),z] + [f(y,z),x] + [f(y,z),x] = 0 \quad \forall x,y,z \in \mathcal{G}_{\bar{1}}.$$

Définition 14.

- *Un morphisme f entre deux superalgèbres de Lie $(\mathcal{G},[.,.]_{\mathcal{G}})$ et $(\mathcal{H},[.,.]_{\mathcal{H}})$ est une application linéaire $f\ :\ \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ commutant aux supercrochets*

$$\forall x,y \in \mathcal{G},\ f([x,y]_{\mathcal{G}}) = [f(x),f(y)]_{\mathcal{H}}.$$

- *Un idéal L d'une superalgèbre de Lie $\mathcal{G}$ est dit gradué si $L = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_2} \left(L \bigcap \mathcal{G}_{\bar{0}}\right)$.*
- *Une superalgèbre de Lie est dite simple si elle ne possède pas d'idéal gradué propre non trivial.*
- *Une superalgèbre de Lie $\mathcal{G}$ est dite semi-simple si elle est non abélienne $\left(\left[\mathcal{G},\mathcal{G}\right] \neq \{0\}\right)$ et si elle ne possède pas d'idéal gradué résoluble non trivial.*

[5] La définition et les propriétés ci-après sont strictement analogues pour une superalgèbre de Lie.

Si $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ est une superalgèbre associative (c'est-à-dire un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué muni d'une unité et d'un produit $\mathbb{Z}_2$-gradué), on peut lui associer une superalgèbre de Lie $\mathrm{SLie}(A)$, de même espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué sous-jacent, dont le supercrochet est ainsi défini

$$[a,b] = ab - (-1)^{\delta a \delta b} ba \quad \forall a \in A_{\delta a}\ \forall b \in A_{\delta b}.$$

Si V est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, son algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}(V)$ est $\mathbb{Z}_2$-graduée et on appelle $\mathcal{L}(V)$ la superalgèbre de Lie associée. On définit alors la supertrace sur $\mathcal{L}(V)$: si $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathrm{str}(a) = \mathrm{tr}_{V_{\bar{0}}} \alpha - \mathrm{tr}_{V_{\bar{1}}} \delta$. On a aussi $\mathrm{str}(A) = \mathrm{tr}(\nu A)$ si $A \in \mathcal{L}(V)$, où $\nu : V \to V : x \in V_{\delta x} \mapsto (-1)^{\delta x} x$. Une représentation d'une k-superalgèbre de Lie $\mathcal{G}$ dans un k-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ est une application k-linéaire paire ($\mathbb{Z}_2$-graduée de degré 0[6]) $\mathcal{P} : \mathcal{G} \to \mathrm{End}(V)$ telle que, quels que soient $a \in \mathcal{G}_i$, $b \in \mathcal{G}_j$,

$$\mathcal{P}([a,b]) = \mathcal{P}(a)\mathcal{P}(b) - (-1)^{\delta a \delta b} \mathcal{P}(b)\mathcal{P}(a).$$

Lorsque cela n'entraîne aucun risque de confusion, on notera, si $g \in \mathcal{G}$, g_V pour $\mathcal{P}(g)$. Si $\mathcal{G}$ est une k-superalgèbre de Lie, la structure de $\mathcal{G}$-module trivial sur k est donnée par l'action nulle $ga = 0 \forall g \in \mathcal{G}\ \forall a \in k$, et par la $\mathbb{Z}_2$-graduation $k = k \oplus \{0\}$. Un homomorphisme entre deux $\mathcal{G}$-modules V et W est une application k-linéaire paire (c'est-à-dire homogène de degré $\bar{0}$) $f : V \to W$ telle que $\forall y \in V\ \forall g \in \mathcal{G}$, $f(gy) = gf(y)$. Comme dans le cas des algèbres de Lie, le supercrochet définit une représentation

$$\mathrm{ad} : \mathcal{G} \to \mathrm{End}(\mathcal{G}) : g \mapsto \left[\mathrm{ad}_{\mathcal{G}}\, g \in \mathrm{End}\, \mathcal{G} : h \mapsto [g,h] \right]$$

appelée représentation adjointe. Ce vocable désigne souvent plus spécifiquement la représentation de $\mathcal{G}_{\bar{0}}$ sur $\mathcal{G}_{\bar{1}}$ qui s'en déduit.

On définit les superdérivations de degré α d'une superalgèbre de Lie $\mathcal{G}$ comme

$$D_\alpha(\mathcal{G}) = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{G}) \mid A(gh) = [A(g),h] + (-1)^{\alpha\gamma}[g, A(h)] \quad \forall g \in \mathcal{G}_\gamma,\ h \in \mathcal{G}\}.$$

Définition 15. *Soient $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ un k-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, f une forme bilinéaire sur V.*

- *La forme f est dite consistante si $f(a,b) = 0 \quad \forall a \in V_{\bar{0}}\ \forall b \in V_{\bar{1}}$.*
- *La forme f est dite supersymétrique si, quels que soient $a, b \in V$ homogènes, $f(a,b) = (-1)^{\delta a\ \delta b} f(b,a)$.*
- *La forme f est dite invariante si, quels que soient a, b, c dans V, $f([a,b],c) = f(a,[b,c])$.*

Une forme invariante sur une superalgèbre simple est soit non dégénérée soit nulle. La forme bilinéaire $(a,b) = \mathrm{str}(ab)$ sur $\mathcal{L}(V)$ est consistante, supersymétrique et invariante. De plus $\mathrm{str}([a,b]) = 0 \quad \forall a,b \in \mathcal{L}(V)$ (propriété de cyclicité).

[6]Si on n'impose pas que le k-espace vectoriel V soit $\mathbb{Z}_2$-gradué, on obtient la notion de représentation non graduée.

1.2.3 Lemme de Schur ; partie locale d'une superalgèbre de Lie

Le lemme de Schur s'étend au cas des superalgèbres de Lie, si $\bar{k} = k$. On dira qu'un ensemble d'opérateurs linéaires $\mathcal{M} \subset \mathrm{GL}(V)$ agissant sur un k-espace vectoriel V est irréductible s'il n'existe pas de sous-k-espace vectoriel propre non trivial de V stable sous tous les éléments de $\mathcal{M}$.

Théorème 3. *Soient $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ un k-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, $\mathcal{M} \subset \mathrm{GL}(V)$ une famille irréductible d'opérateurs linéaires, $C(\mathcal{M}) = \{a \in \mathcal{L}(V) | [a, m] = 0 \ \forall m \in \mathcal{M}\}$. Alors $C(\mathcal{M}) = kI_V$, sauf si $\dim V_{\bar{0}} = \dim V_{\bar{1}}$, auquel cas $C(\mathcal{M})$ est engendré par est un opérateur involutif A permutant $V_{\bar{0}}$ et $V_{\bar{1}}$.*

Dans le cas où $\mathcal{M}$ est l'image d'une représentation d'une superalgèbre de Lie $\mathcal{G}$, le lemme de Schur entraîne que $(\mathrm{End}_{\mathcal{G}}(V))_{\bar{0}} = kI_V$ et que $(\mathrm{End}_{\mathcal{G}}(V))_{\bar{1}} = kA$, où soit $A = 0$ soit $A = -I_V$ selon le cas.

Un cas particulier intéressant est celui où on envisage les représentations diagonales ρ_m de $\mathcal{L}(V)$ sur les puissances tensorielles $V^{\otimes m}$ d'un k-espace vectoriel V

$$(\rho_m(g))(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_n, \text{ pour } g \in \mathcal{L}(V).$$

Si on prend $\mathcal{M} = \{\tau(\sigma) \,|\, \sigma \in \mathfrak{S}_m\}$, pour l'action évidente τ de $\mathfrak{S}_m$ sur $V^{\otimes m}$, alors $\mathrm{End}_{\mathfrak{S}_m}(V^{\otimes m}) = \rho_m(\mathcal{G})$. Le concept suivant est fort utile, notamment dans la construction des superalgèbres de Lie contragrédientes [19, 9, 23].

Définition 16. *Une superalgèbre de Lie $\mathcal{G}$ est dite $\mathbb{Z}$-graduée si l'espace vectoriel sous-jacent se décompose en somme directe de sous-espaces $\mathbb{Z}_2$-gradués de dimension finie $\mathcal{G}_i$, $i \in \mathbb{Z}$ tels que $\mathcal{G}_i\mathcal{G}_j \subset \mathcal{G}_{i+j}$. Une telle graduation est dite consistante si $\mathcal{G}_{\bar{0}} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{2i}$ (et donc $\mathcal{G}_{\bar{1}} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{2i+1}$).*

Définition 17.

- *Si $\mathcal{G} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_i$ est une superalgèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée, on appelle partie locale de $\mathcal{G}$ le sous-espace $\mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$ muni de la restriction du supercrochet.*
- *Une superalgèbre de lie locale $\hat{\mathcal{G}}$ est un k-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué qui est somme directe de trois k-espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$, muni, pour tous $-1 \leq i, j \leq 1$ tels que $|i + j| \leq 1$, d'une opération bilinéaire $[.,.] \ : \ \mathcal{G}_i \times \mathcal{G}_j \to \mathcal{G}_{i+j}$ satisfaisant la supersymétrie $[x, y] = (-1)^{\delta x \ \delta y}[y, x]$ pour tous $x, y \in \hat{\mathcal{G}}$ homogènes, et l'identité de Jacobi*
$$[x, [y, z]] + (-1)^{\delta x(\delta y+\delta z)}[y, [z, x]] + (-1)^{(\delta x+\delta y)\delta z}[z, [x, y]] = 0.$$
- *Une superalgèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée $\mathcal{G}$ de partie locale $\hat{\mathcal{G}}$ est dite maximale si, pour toute superalgèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée $\mathcal{G}'$ de partie locale $\hat{\mathcal{G}}'$, tout morphisme $f \ : \ \hat{\mathcal{G}} \to \hat{\mathcal{G}}'$ s'étend en un morphisme surjectif $\bar{f} \ : \ \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$.*
- *Une superalgèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée $\mathcal{G}$ de partie locale $\hat{\mathcal{G}}$ est dite minimale si, pour toute superalgèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée $\mathcal{G}'$ de partie locale $\hat{\mathcal{G}}'$, tout morphisme $f \ : \ \hat{\mathcal{G}}' \to \hat{\mathcal{G}}$ s'étend en un morphisme surjectif $\bar{f} \ : \ \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$.*

Proposition 3. *Soit $\hat{\mathcal{G}}$ une superalgèbre de Lie locale. Alors il existe une superalgèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée maximale (resp. minimale), de partie locale $\hat{\mathcal{G}}$.*

Notons que deux superalgèbres de Lie $\mathbb{Z}$-graduées bitransitives (i.e. telles que $\{x \in \mathcal{G} \,|\, [x, \mathcal{G}_1] = 0\} = \{0\}$) sont isomorphes si et seulement si leurs parties locales sont isomorphes. Une superalgèbre de Lie $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$ de dimension finie est dite classique si elle est simple et si la représentation de $\mathcal{G}_{\bar{0}}$ sur $\mathcal{G}_{\bar{1}}$ est irréductible.

1.2.4 Décomposition radicielle

Soit $\mathcal{G}$ une superalgèbre de Lie. Une sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{G}$ est simplement une sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{G}_{\bar{0}}$. Puisque tout automorphisme intérieur de $\mathcal{G}_{\bar{0}}$ s'étend en un automorphisme intérieur de $\mathcal{G}$, les sous-algèbres de Cartan d'une superalgèbre de Lie $\mathcal{G}$ sont mutuellement conjuguées via un élément du groupe de Weyl de $\mathcal{G}_{\bar{0}}$, comme le sont celles de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_{\bar{0}}$. Si $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{G}$, on peut écrire

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_\alpha,$$

où

$$\mathcal{G}_\alpha = \{a \in \mathcal{G} | [h, a] = \alpha(h) a \, \forall h \in \mathcal{H}\}$$

et où $\Delta = \{\alpha \in \mathcal{H}^* | \mathcal{G}_\alpha \neq \{0\}\} \subset \mathcal{H}^*$ est l'ensemble des racines. Il s'écrit $\Delta = \Delta_{\bar{0}} \sqcup \Delta_{\bar{1}}$, où $\Delta_{\bar{0}}$ est le système de racines de $\mathcal{G}_{\bar{0}}$ et $\Delta_{\bar{1}}$ l'ensemble des poids du $\mathcal{G}_{\bar{0}}$-module $\mathcal{G}_{\bar{1}}$ (pour la représentation adjointe).

1.2.5 Classification des superalgèbres de Lie classiques

Théorème 4. *Une superalgèbre de Lie classique*[7] *est isomorphe, soit à une algèbre de Lie simple, donc à $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4$ ou G_3, soit à une superalgèbre de Lie « de base », donc à $A(m,n), B(m,n), C(n), D(m,n), D(2,1;\alpha), F(4)$ ou $G(3)$, soit à une superalgèbre de Lie « étrange », c'est-à-dire à $P(n)$ ou $Q(n)$.*

Nous donnerons simplement la définition de ces deux dernières algèbres

$$P(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -{}^t a \end{pmatrix} \Big| \text{ tr } a = 0, \, b \text{ symétrique}, \, c \text{ antisymétrique} \right\},$$

$$Q(n) = \widetilde{Q(n)} / \mathcal{Z}(Q(n)),$$

où $\widetilde{Q(n)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \Big| \text{ tr } b = 0 \right\}$ et où $\mathcal{Z}(Q(n)) = kI_{2n+2}$ est le centre de $\widetilde{Q(n)}$.

Cependant, nous nous intéresserons dans la suite surtout aux superalgèbres de Lie contragrédientes. Celles-ci peuvent être définies à partir de leur matrice de Cartan généralisée A.

Soient $A \in k^{r \times r}$ une matrice carrée et $\tau \subset I = \{1, 2, \ldots, r\}$. On va associer à ces données une superalgèbre de Lie (appelée contragrédiente) qu'on notera $\mathcal{G}(A;\tau)$. Soient $\mathcal{G}_{-1}$, $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_1$ des k-espaces vectoriels de bases respectives $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$; $(h_1, h_2, \ldots, h_r)$; $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$. Définissons alors une structure de superalgèbre de Lie locale $\hat{\mathcal{G}}(A;\tau) = \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$

$$\forall i,j \in I \quad [e_i, f_j] = \delta_{i,j} h_i, \; [h_i, h_j] = 0, \; [h_i, e_j] = a_{i,j} e_j, \; [h_i, f_j] = -a_{i,j} f_j;$$

$$\forall i \in I \setminus \tau \quad \delta h_i = \bar{0}, \delta e_i = \delta f_i = \bar{0}, \, \forall i \in \tau \quad \delta e_i = \delta f_i = \bar{1}.$$

On définit alors $\mathcal{G}(A;\tau)$ comme étant l'unique superalgèbre de Lie minimale de partie locale $\hat{\mathcal{G}}$.

[7] Il existe, même sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, des superalgèbres de Lie simples, de dimension finie, non classiques [19].

Au contraire du cas des algèbres de Lie, il faut en général rajouter des relations aux relations de Serre pour définir par générateurs et relations les superalgèbres de Lie contragrédientes [41, 31].

Les propriétés suivantes sont cruciales pour la classification des superalgèbres de Lie simples contragrédientes de dimension finie.

Proposition 4.

- *Si* $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, *avec* A_1 *de taille* r_1, A_2 *de taille* r_2,

$$\mathcal{G}(A;\tau) \cong \mathcal{G}(A_1;\tau \cap I_1) \times \mathcal{G}\left(A_2;\tau \cap I_2\right),$$

  où $I_1 = \{1, 2, \ldots, r_1\}$ *et* $I_2 = \{1, 2, \ldots r_2\}$.
- *Supposons* $\mathcal{G}(A;\tau)$ *de dimension finie, soit* $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\left(\mathcal{G}\left(A;\tau\right)\right)$ *son centre. Alors* $\mathcal{G}(A;\tau)/\mathcal{Z}$ *est simple si et seulement si la matrice* A *est indécomposable, c'est-à-dire*

$$\forall i, j \in I\ \exists t \in \mathbb{N}\ \exists i_1, \ldots i_t \in I \quad a_{i,i_1} a_{i_1,i_2} \ldots a_{i_t,j} \neq 0.$$

- *Si* $\mathcal{G}\left(A;\tau\right)$ *est de dimension finie et vérifie la propriété ci-dessus, alors il existe sur* $\mathcal{G}\left(A;\tau\right)$ *une forme bilinéaire invariante, non dégénérée, consistante et supersymétrique, induisant une forme* $(.,.)$ *sur* $\mathcal{G}\left(A;\tau\right)$ *satisfaisant*
  - $\ker\left(.,.\right) = \mathcal{Z}(\mathcal{G}(A;\tau))$
  - $(\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta) = 0$ *si* $\alpha + \beta \neq 0$.
  - $(.,.)\big|_{\mathcal{G}_\alpha \times \mathcal{G}_{-\alpha}}$ *est nondégénérée,* $\forall \alpha \in \Delta$.
- *Soit* $\mathcal{G}\left(A;\tau\right)$ *une superalgèbre de Lie contragrédiente de dimension finie dont la matrice de Cartan* A *est irréductible ; soit* $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\left(\mathcal{G}\left(A;\tau\right)\right)$ *son centre. Alors* $\mathcal{G}/\mathcal{Z}$ *est une superalgèbre de Lie classique.*

Notons que, dans une matrice A, on peut toujours supposer que $a_{i,i} \in \{0, 2\}$, $\forall 1 \leq i \leq n$, sans changer la structure de $\mathcal{G}\left(A;\tau\right)$.

1.2.6 Diagrammes de Dynkin généralisés

Définissons maintenant les diagrammes de Dynkin généralisés [19, 23, 9, 39]. Contrairement au cas des algèbres de Lie, une superalgèbre de Lie ne détermine pas de manière unique un diagramme de Dynkin généralisé[8]. Cependant la donnée d'un tel diagramme permet de reconstituer la structure de la superalgèbre de Lie classique associée[9]. Généralement on prend des diagrammes particuliers, qui correspondent à des sous-algèbres de Borel « distinguées » [20].

---

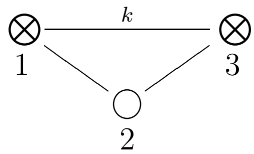
[8]Il existe néanmoins une méthode systématique de détermination des diagrammes de Dynkin généralisés non équivalents, citée dans [23]. La raison de cette non univocité est notamment que le groupe de Weyl, qu'on peut définir à partir des réflexions par rapport aux éléments de $\Delta_{\bar{0}}$ — les racines bosoniques —, n'est pas assez grand pour agir transitivement sur l'ensemble des systèmes de racines. La méthode en question consiste à ajouter au groupe de Weyl des transformations associées aux racines impaires, et à ainsi obtenir tous les systèmes de racines possibles à partir d'un système initial.

[9]En outre, comme dans le cas non supersymétrique, le diagramme de Dynkin d'une superalgèbre de Lie permet d'en déterminer les sous-superalgèbres de Lie régulières — c'est-à-dire s'écrivant $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{H} \otimes \left(\bigoplus_{\alpha \in \tilde{\Delta}} \mathcal{G}_\alpha \right)$ avec $\tilde{H} \subset H$ et $\tilde{\Delta} \subset \Delta$. Pour rappel, on rajoute la plus petite racine — obtenant ainsi le « diagramme de Dynkin complété » — et on enlève arbitrairement un ou plusieurs cercles, puis, si l'on veut, on recommence sur le diagramme obtenu (voir [23] et ses références).

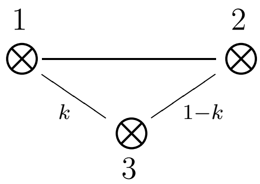
À un sommet d'indice i correspond une racine α_i. Si elle est paire (donc telle que $a_{i,i} = 2$), le symbole est $\bigcirc$. Si la racine est impaire, le symbole correspondant sera $\bigotimes$ si $a_{i,i} = 0$ et $\bullet$ si $a_{i,i} = 2$. Si $a_{i,j} (= a_{j,i}) = 0$, les sommets d'indices i et j ne seront pas joints, sinon ils seront joints par $n_{i,j}$ arêtes, où

$$n_{i,j} = \begin{cases} \max(-a_{i,j}, -a_{j,i}) & \text{si } a_{i,i} = a_{j,j} = 2 \\ 1 & \text{si } a_{i,i} = a_{j,j} = 0 \\ -a_{i,j} & \text{si } a_{i,i} = 2 \text{ et } a_{j,j} = 0. \end{cases}$$

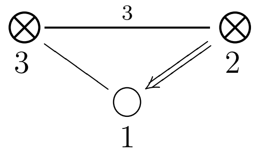
Lorsque $n_{i,j} > 1$, on oriente l'arête joignant les sommets d'indices i et j du sommet d'indice j vers le sommet d'indice i, si $a_{i,i}.a_{j,j} = 2$ avec $-a_{i,j} > -a_{j,i}$, ou si $a_{j,j} = 0$. En plus de ces conventions, il faut introduire des diagrammes de base à trois sommets, que nous listons ci-après avec leurs matrices de Cartan respectives. Dans les diagrammes ci-dessous, $\odot$ peut être remplacé soit par $\bigcirc$, soit par $\bullet$. Dans la suite, comme Van de Leur dans [9], on omettra k lorsqu'il est égal à 1.



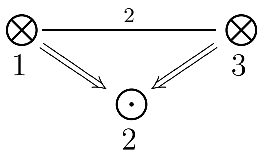
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -k \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & \frac{1}{k} & 0 \end{pmatrix}$$



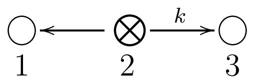
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -k \\ \frac{1}{k-1} & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1-k}{k} & 0 \end{pmatrix}$$



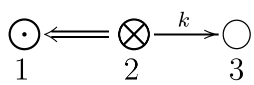
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ \frac{-2}{3} & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$



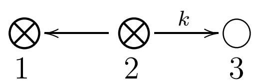
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$



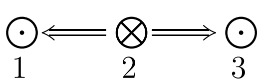
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \frac{-1}{k} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



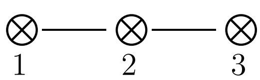
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ \frac{-1}{k} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{k} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

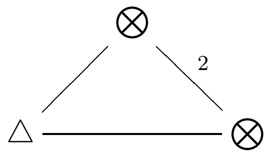


$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

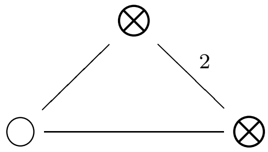


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

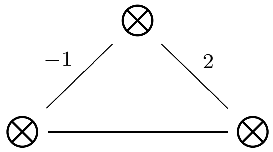
Dans le tableau suivant, nous résumons tous les diagrammes de Dynkin possibles pour les superalgèbres de Lie classiques. Le symbole △ peut être remplacé soit par ◯ soit par ⊗ ; il faut alors, le cas échéant, rajouter une étiquette ou une flèche sur certaines arêtes. Par exemple, le diagramme



remplace un des diagrammes



ou

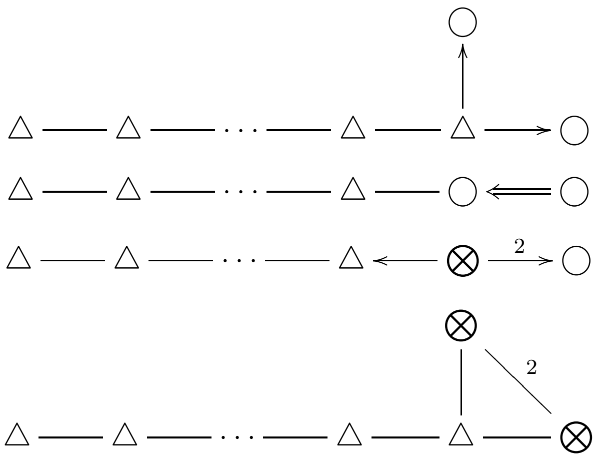


.

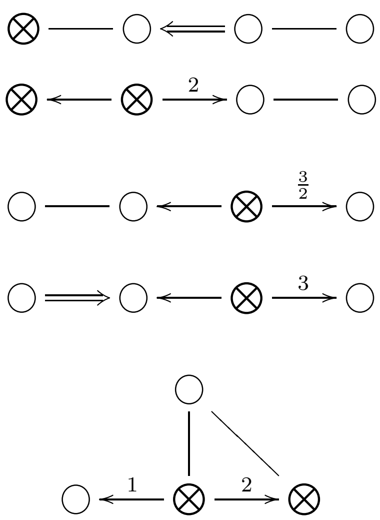
A(*m*, *n*)

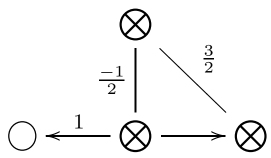
B(*m*, *n*)

C ou D

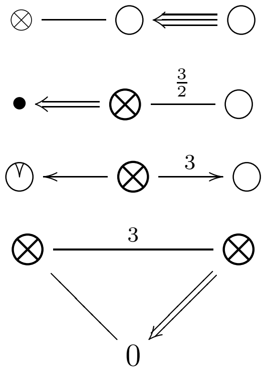


F(4)





$G(3)$



1.3 Le cas affine

Les algèbres de Kac-Moody affines [21] sont des généralisations de dimension infinie des algèbres de Lie semi-simples. Elles peuvent également être définies en termes de matrices de Cartan.

1.3.1 Définition des algèbres de Kac-Moody affines

Définition 18. *Une matrice de Cartan généralisée est une matrice*

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq \ell} \in \mathbb{Z}^{\ell \times \ell},$$

indécomposable, telle que $a_{i,i} = 2$, $a_{i,j} = 0 \iff a_{j,i} = 0$, $a_{i,j} \in -\mathbb{N}$ *si* $1 \leq i \neq j \leq \ell$.

Dans ce paragraphe, on dira qu'un vecteur $u = (u_1, \ldots, u_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ est positif, notation : $u \geq 0$ (resp. strictement positif, négatif, strictement négatif), si chacune de ses composantes est positive (resp. strictement positive, négative, strictement négative). On distingue trois types de matrices de Cartan généralisées indécomposables. La matrice A est dite de type fini s'il existe $u > 0$ tel que $Au > 0$. Alors $Av \geq 0$ entraîne $v > 0$ ou $v = 0$. La matrice A est dite de type affine s'il existe $u > 0$ tel que $Au = 0$. Alors ce vecteur est unique à un facteur multiplicatif près, A est de rang $\ell - 1$, et, si $Av = 0$, alors $v > 0$. Dans le troisième cas, il existe $u > 0$ tel que $Au < 0$, et A est dite de type indéfini. Remarquons que A et ${}^tA$ sont toujours de même type.

Proposition 5. *Pour une matrice de Cartan généralisée A, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- *La matrice A est de type affine.*
- *La matrice A est semi-définie positive de corang* 1.
- *Tous les mineurs principaux propres de A sont positifs, et* $\text{dét}(A) = 0$.
- *Il existe une matrice diagonale inversible D telle que DA soit symétrique semi-définie positive.*

On peut voir, par exemple sur les diagrammes, que toute sous-matrice principale propre d'une matrice de Cartan affine se décompose en matrices de Cartan de type fini.

Définition 19. *Une réalisation d'une matrice (quelconque) A est un triplet $(\mathfrak{h}, B, \check{B})$, où $\mathfrak{h}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ et $\check{B} = \{\check{\alpha}_1, \ldots, \check{\alpha}_\ell\}$ des parties de $\mathfrak{h}^*$ et de $\mathfrak{h}$ linéairement indépendantes, le tout vérifiant $\alpha_i(H_j) = a_{i,j} \quad \forall\ 1 \le i, j \le \ell$.*

On notera plus simplement $h_i = \check{\alpha}_i \quad \forall 1 \le i \le \ell$. Suivant Kac, on définit alors $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ comme l'algèbre engendrée par $\mathfrak{h}$ et des éléments e_i, f_i, $1 \le i \le \ell$, avec les relations $[h, h'] = 0$, $[h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i$, $[h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i$, $[e_i, f_j] = \delta_{i,j} h_i$.

On pose ensuite $\mathfrak{g}(A) = \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r}$, où $\mathfrak{r}$ est l'idéal maximal tel que $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$. Lorsque A est une matrice de Cartan généralisée, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A)$ est appelée l'algèbre de Kac-Moody associée à A.

Proposition 6. *L'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ associée à une matrice de Cartan généralisée de type fini ou affine*[10] *peut être définie par les générateurs e_i, f_i, $1 \le i \le \ell$, et $h \in \mathfrak{h}$, et les relations, pour $h, h' \in \mathfrak{h}$ et $1 \le i, j \le \ell$,*
- $[h, h'] = 0$,
- $[e_i, f_j] = \delta_{i,j} h_i$,
- $[h, e_i] = \alpha_i(h) e_i$,
- $[h, f_i] = -\alpha_i(h) f_i$,
- $\mathrm{ad}(e_i)^{-a_{i,j}+1}(e_j) = 0$,
- $\mathrm{ad}(f_i)^{-a_{i,j}+1} f_j = 0$.

1.3.2 Propriétés des algèbres de Kac-Moody affines

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody affine, A sa matrice de Cartan. Dorénavant, on renumérotera de 0 à $n = \ell - 1$ les lignes et les colonnes de A. Comme dans le cas fini, on a une décomposition radicielle $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$, où $R = R_+ \sqcup R_-$ est l'ensemble des racines. On définit de même la décomposition triangulaire et le groupe de Weyl.

Définition 20. *Une racine $\alpha \in R$ est dite réelle s'il existe $w \in W$ tel que $w(\alpha) \in B$. Dans le cas contraire, la racine α est dite imaginaire. On note $R^{\Re} = R^{\Re}_+ \sqcup R^{\Re}_-$ l'ensemble des racines réelles et $R^{\Im} = R^{\Im}_+ \sqcup R^{\Im}_-$ l'ensemble des racines imaginaires.*

Comme la matrice A est affine, notons $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_n)$ l'unique vecteur strictement positif, composé d'entiers premiers entre eux dans leur ensemble, tel que $A\bar{a} = 0$. On notera $\check{\bar{a}} = (\check{a}_0, \ldots, \check{a}_n)$ le vecteur correspondant pour ${}^tA$. On définit l'élément $\delta = \sum_{0 \le i \le n} a_i \alpha_i$ et l'élément central canonique $K = \sum_{0 \le i \le n} \check{a}_i \check{\alpha}_i$. Alors $R^{\Im} = \mathbb{Z}_0 \delta$, $R^{\Im}_+ = \mathbb{N}_0 \delta$ et le centre de $\mathfrak{g}$ est

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{h \in \mathfrak{h} | \langle \alpha_i, h \rangle = 0\ \forall 0 \le i \le n\} = \mathbb{C}K.$$

On définit ensuite l'élément d'échelle $d \in \mathfrak{h}$ tel que $\langle \check{\alpha}_i, d \rangle = 0\ \forall 1 \le i \le n$ et $\langle \check{\alpha}_0, d \rangle = 1$. Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathbb{C}d$. Si on pose $\dot{\mathfrak{h}} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}\alpha_i$, alors $\mathfrak{h} = \dot{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$. On note enfin θ la plus haute racine de $\mathfrak{g}$ $\theta = \delta - a_0 \alpha_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i$.

[10] Sur les relations définissant une algèbre de Lie de dimension infinie générale, voir [27].

1.3.3 Construction et classification des algèbres de Kac-Moody affines non tordues

On va voir comment définir [21] ces algèbres affines $X_l^{(1)}$ à partir des algèbres X_l ($X \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$). Soit $\mathring{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie simple complexe de type X_l, munie de sa forme de Killing K et d'un système de Chevalley $(e_i, f_i)_{1 \leq i,j \leq n}$, et soit $\mathcal{L} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ l'algèbre des polynômes de Laurent. Si on note Rés la forme $\mathbb{C}$-linéaire définie sur $\mathcal{L}$ par $\text{Rés}(t^{-1}) = 1$ et $\text{Rés}(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}) = 0$ (c'est-à-dire $\text{Rés}(\sum_{i=-M}^{N} c_i t^i) = c_{-1}$), la forme bilinéaire ϕ sur $\mathcal{L}$ définie par $\phi(P, Q) = \text{Rés}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} Q\right)$ est antisymétrique et vérifie une identité circulaire

$$\phi(PQ, R) + \phi(QR, P) + \phi(RP, Q) = 0 \quad \forall P, Q, R \in \mathcal{L}.$$

On pose $\mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}}) = \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{C}} \mathring{\mathfrak{g}}$. C'est l'algèbre des lacets, ou encore l'algèbre des fonctions polynômiales de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathring{\mathfrak{g}}$, pour la structure d'algèbre de Lie donnée par le crochet

$$[P \otimes x, Q \otimes y]_{\mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}})} = PQ \otimes [x, y].$$

Ensuite, on définit

$$\psi(P \otimes x, Q \otimes y) = \text{Rés}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, b\right) \dot{K}(x, y).$$

Vu l'identité vérifiée par ϕ, ψ est un cocycle de $\mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$. Soit alors $\tilde{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}}) = \mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C}J$ l'extension centrale correspondante de $\mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$ (son crochet est donc donné par $[g + \lambda J, h + \lambda' J]_{\tilde{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})} = [g, h]_{\mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}})} + \psi(g, h)J$). Alors l'algèbre de Kac-Moody affine non tordue $\mathfrak{g}$ associée à $\mathring{\mathfrak{g}}$ est donnée par l'extension semi-directe

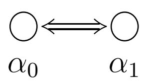
$$\mathfrak{g} = \tilde{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C}d = \mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C}d \oplus \mathbb{C}J,$$

pour le crochet

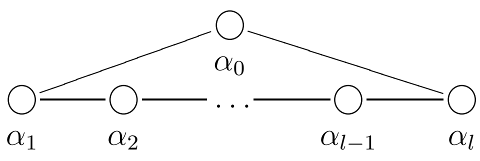
$$\begin{array}{l} [t^m \otimes g + \lambda J + \mu d, t^{m'} \otimes h + \lambda' J + \mu' d]_{\mathfrak{g}} = \\ t^{m+m'} \otimes [g, h]_{\mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}})} + \mu m' t^{m'} \otimes h - \mu m t^m \otimes g + m t^m \delta_{m,-n} K(x, y) J \end{array}.$$

En posant $E_i = 1 \otimes e_i$, $F_i = 1 \otimes f_i$, $1 \leq i \leq n$, et $e_0 \in \mathring{\mathfrak{g}}_\theta$ tel que $K(e_0, \omega(e_0)) = \frac{-2}{K(\theta, \theta)}$, $E_0 = t \otimes e_0$ et $F_0 = t^{-1} \otimes f_0$, on voit que $\mathfrak{g}$ correspond bien à la matrice de Cartan étendue [4] de $\mathring{\mathfrak{g}}$. Le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ est bien le groupe de Weyl affine [4] de $\mathring{\mathfrak{g}}$. On a, pour $a \in \mathbb{C}$, un morphisme d'évaluation $\text{év}_a \;:\; \mathfrak{g} \to \mathring{\mathfrak{g}} \;:\; P \otimes g + \lambda K + \mu d \mapsto P(a)g$. On énumère ci-dessous l'ensemble des diagrammes de Dynkin correspondant (biunivoquement) aux algèbres de Kac-Moody affines non tordues.

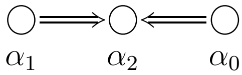
$A_1^{(1)}$



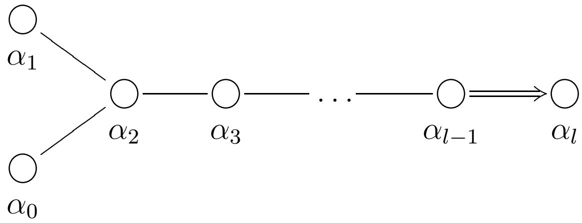
$A_l^{(1)}$



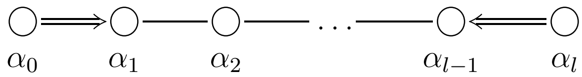
$B_2^{(1)}$



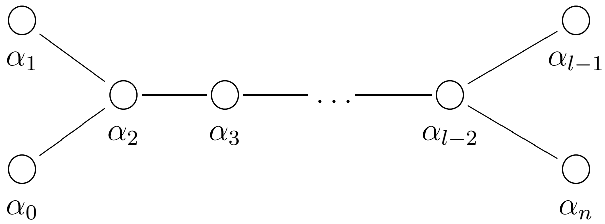
$B_l^{(1)}$



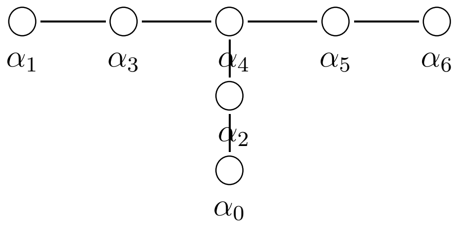
$C_l^{(1)}$



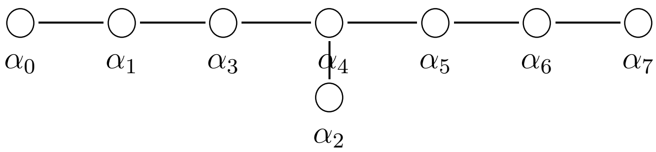
$D_l^{(1)}$



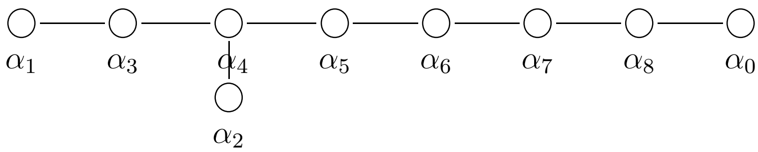
$E_6^{(1)}$



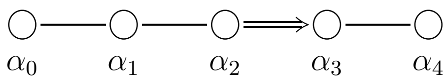
$E_7^{(1)}$



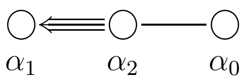
$E_8^{(1)}$



$F_4^{(1)}$



$G_2^{(1)}$



1.3.4 Construction et classification des algèbres de Kac-Moody affines tordues

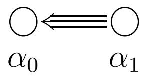
Soit [21] $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe de type

$$X_m \in \{D_{m+1}, A_{2m-1}, E_6, G_4, A_{2m}\}.$$

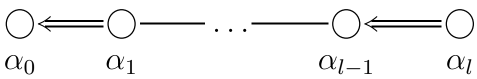
Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ un automorphisme d'ordre $r \geq 2$. On pose $\upsilon = e^{\frac{2\pi i}{r}}$. On a une décomposition en sous-espaces propres $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_\ell$. L'automorphisme σ s'étend sur $\mathcal{L}(\mathfrak{g}) = \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ en $\tilde{\sigma}(t^j \otimes g) = (\upsilon^{-j} t^j) \otimes \sigma(g)$, et s'étend en $\hat{\sigma}$ sur $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) = \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}d' \oplus \mathbb{C}K'$ en posant $\hat{\sigma}(K') = K'$, $\hat{\sigma}(d') = d'$.

On pose alors $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, r) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, r)_j = \mathrm{Fix}\,(\tilde{\sigma})$, où $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, r)_j = t^j \otimes \mathfrak{g}_{\bar{j}}$. L'algèbre $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, r)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}}(\mathbb{C}^\times, \mathfrak{g})$, où $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{C}^\times$ par multiplication par υ^{-1} et sur $\mathfrak{g}$ via σ. L'algèbre de Kac-Moody tordue associée à $\mathfrak{g}$, de type $X_N^{(r)}$, est alors $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m) = \mathrm{Fix}(\hat{\sigma}) = \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, r) \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d' \subset \hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$, avec le crochet induit par celui de $\hat{\mathcal{L}}$. Notons qu'on a $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, r) = \mathfrak{g}'$. On vérifie que $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ est bien une algèbre de Lie de Kac-Moody affine, en trouvant des générateurs de Chevalley. Pour ce type d'algèbres, l'élément d'échelle est donné par $d = a_0 r^{-1} d'$ et l'élément central canonique par $K = rK'$. Ci-dessous la liste des diagrammes de Dynkin correspondant à ce type d'algèbres.

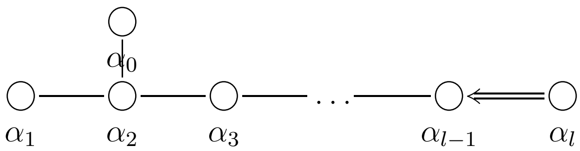
$A_2^{(2)}$



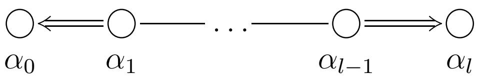
$A_{2\ell}^{(2)}$ $(\ell \geq 2)$



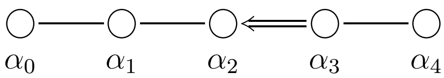
$A_{2\ell-1}^{(2)}$ $(\ell \geq 3)$



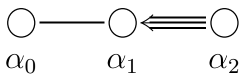
$D_{\ell+1}^{(2)}$ $(\ell \geq 2)$



$E_6^{(2)}$



$G_2^{(3)}$



1.4 Les superalgèbres de Lie affine

1.4.1 Définition des superalgèbres de Kac-Moody

Les définitions suivantes sont dues à Van de Leur [9].

Définition 21. *Une matrice de Cartan supergénéralisée est un couple* $(A;\tau)$*, où* $\tau \subset \{1,\ldots,n\}$ *est un ensemble d'indices impairs et où* A *est une matrice* $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ *satisfaisant*

- *Si* $a_{i,i}=0$*,* $i\in\tau$*;*
- *Si* $a_{i,i}\neq 0$*,* $a_{i,i}=2$*;*
- *Si* $a_{i,i}=2$ *et* $i\notin\tau$*,* $a_{i,j}\in-\mathbb{N}$ si $i\neq j$*;*
- *Si* $a_{i,i}=2$ *et* $i\in\tau$*,* $\frac{a_{i,j}}{2}\in-\mathbb{N}$ si $i\neq j$*;*
- $a_{i,j}=0$ *implique* $a_{j,i}=0$*.*

Définition 22. *Une superalgèbre de Kac-Moody est une superalgèbre de Lie contragrédiente* $\mathcal{G}(A,\tau)$*, où* A *est une matrice de Cartan supergénéralisée et* $\tau\subset\{1,\ldots,n\}$*.*

On a toujours une décomposition radicielle

$$\mathcal{G}=\mathcal{H}\bigoplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta}\mathcal{G}_\alpha\right).$$

Si on lui choisit des générateurs de Chevalley $(e_i,f_i)_{1\leq i\leq n}$, une superalgèbre de Kac-Moody $\mathcal{G}(A;\tau)$ vérifie toujours les relations de Serre

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{ad}_{\mathcal{G}(A;\tau)}\,e_i\right)^{1-a_{i,j}}(e_j) &= \left(\mathrm{ad}_{\mathcal{G}(A;\tau)}\,f_i\right)^{1-a_{i,j}}(f_j) &= 0 \quad \text{si } a_{i,i}=2,\\
\left(\mathrm{ad}_{\mathcal{G}(A;\tau)}\,e_i\right)^{2}(e_j) &= \left(\mathrm{ad}_{\mathcal{G}(A;\tau)}\,e_i\right)^{2}(e_j) &= 0 \quad \text{si } a_{i,i}=0 \text{ et } a_{i,j}\neq 0,\\
\left(ad_{\mathcal{G}(A;\tau)}e_i\right)(e_j) &= \left(ad_{\mathcal{G}(A;\tau)}e_i\right)(e_j) &= 0 \quad \text{si } a_{i,i}=0 \text{ et } a_{i,j}=0.
\end{aligned}$$

Même si la matrice de Cartan supergénéralisée A est symétrisable, les relations de Weyl et les relations de Serre ne fournissent pas une présentation de $\mathcal{G}(A;\tau)$, le problème est de trouver les relations manquantes, notamment pour pouvoir ensuite les déformer[11].

1.4.2 Classification des superalgèbres de Kac-Moody symétrisables de croissance finie

Voici le théorème de classification des superalgèbres de Kac-Moody symétrisables de dimension de Gelfand-Kirillov finie.

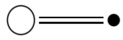
Théorème 5. *Soit* A *une matrice de Cartan supergénéralisée, symétrisable et indécomposable. Alors* $\mathcal{G}(A;\tau)$ *est de dimension de Gelfand-Kirillov finie si et seulement si* $(A;\tau)$ *est équivalente à* $((0),\emptyset)$*,* $((0),\{1\})$ *ou* $(A,\emptyset)$*, où* A *est une matrice de Cartan généralisée (alors* $\mathcal{G}(A;\tau)$ *est une algèbre de Lie semi-simple ou affine), à une*

[11] Yamane, in [37, 39, 40], a obtenu des relations définissantes complètement explicites pour les superalgèbres affines ; voir aussi [28] pour un exemple de déformation.

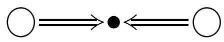
des matrices des superalgèbres de Lie classiques citées plus haut, ou à une matrice affine, voir la table ci-dessous (dans tous ces cas, c'est bien une superalgèbre de Kac-Moody) .

Lorsque la matrice de Cartan A d'une superalgèbre de Kac-Moody de croissance finie $\mathcal{G}(A;\tau)$ est indécomposable et symétrisable, on parle de superalgèbre de Lie affine. Dans ce cas, et de façon analogue au cas non supersymétrique, toute sous-matrice propre principale de A est la matrice de Cartan d'une superalgèbre de Lie de dimension finie. Suivent les diagrammes de Dynkin des superalgèbres de Lie affines [9, 23, 39], à $n = k = \ell = 1$ sommets.

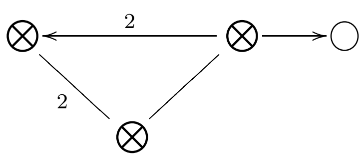
$A(0,2)^{(4)}$

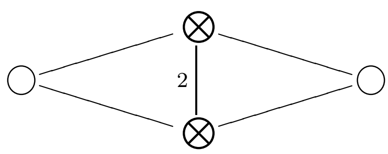


$A(0,3)^{(2)}$

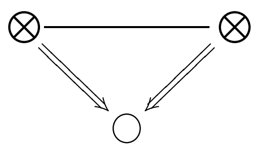


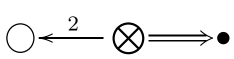
$A(1,3)^{(2)}$



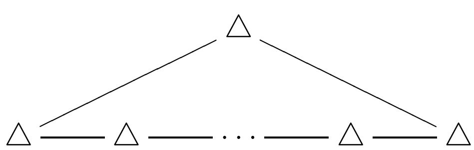


$A(2,1)^{(2)}$

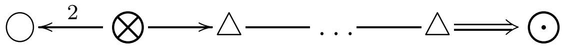


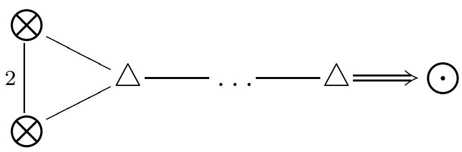


$A(k-1,\ell)\,(1)\,(\text{pour } |\tau| \text{pair et } k \geq 1)$

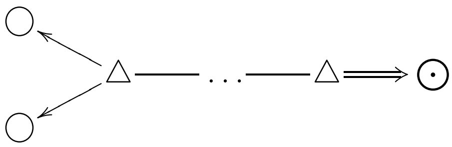


$B(k,\ell)^{(1)}$ (pour $|\tau|$ impair) ou $A(2k, 2\ell-1)^{(2)}$ (pour $|\tau|$ pair)



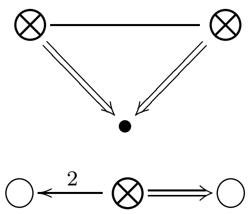


$B\,(k,\ell)^{(1)}$ (pour $|\tau|$ pair) ou $A\,(2k, 2\ell-1)^{(2)}$ (pour $|\tau|$ impair)



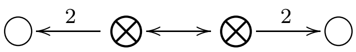
$B\,(0,1)^{(1)}$

$B\,(1,1)^{(1)}$

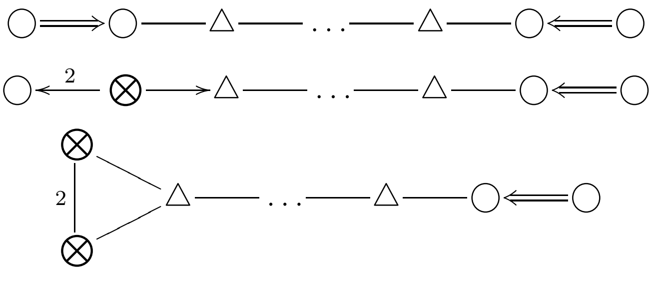


$C\,(2)^{(2)}$

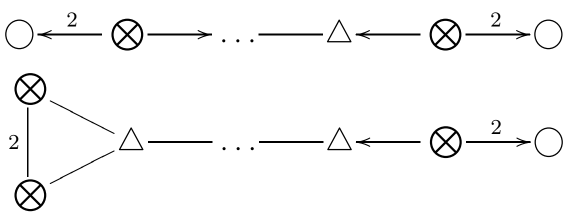
$C(3)^{(1)}$

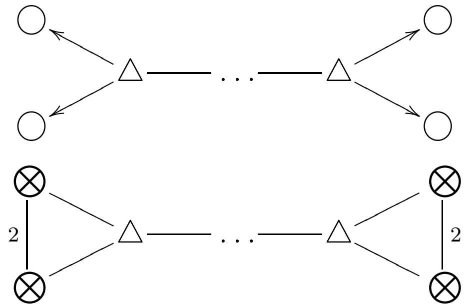


$C(n)^{(1)}$, $D\,(k,\ell)^{(1)}$ (pour $|\tau|$ pair), ou $A\,(2k-1, 2\ell-1)^{(2)}$ (pour $|\tau|$ impair)

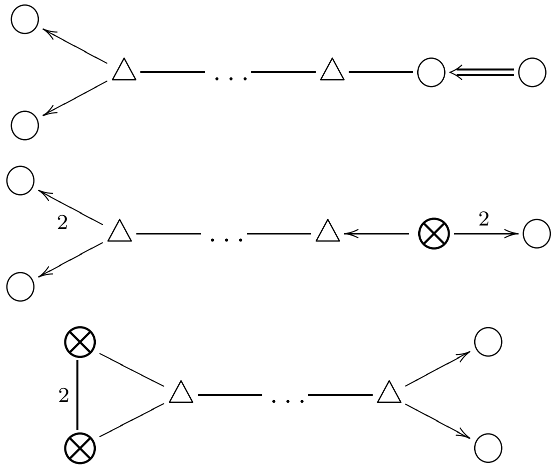


$D\,(k,\ell)^{(1)}$ (pour $|\tau|$ impair), ou $A\,(2k-1, 2\ell-1)^{(2)}$ (pour $|\tau|$ impair)



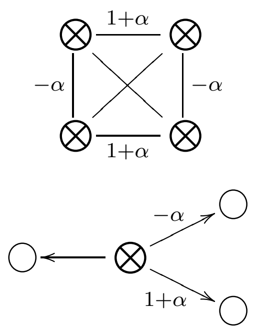


$A\,(2k-1,2\ell-1)^{(2)}$ (pour $|\tau|$ impair), ou $D\,(k,\ell)^{(1)}$ (pour $|\tau|$ impair)

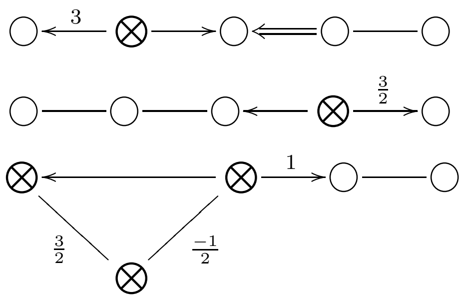


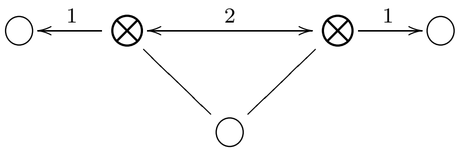
$C(n+1)^{(2)}$, $D\,(k+1,\ell)^{(2)}$ (pour $|\tau|$ pair), ou $A\,(2k,2\ell)^{(4)}$ (pour $|\tau|$ impair)

$D\,(2,1;\alpha)^{(1)}$

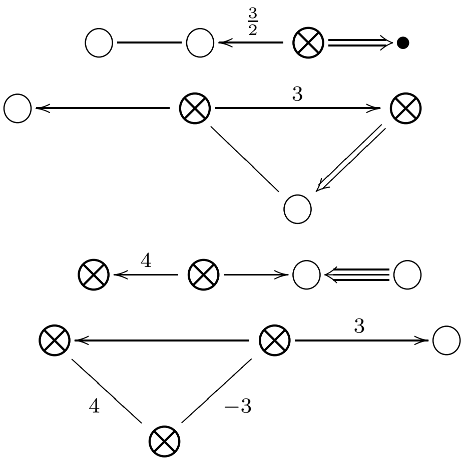


$F(4)^{(1)}$

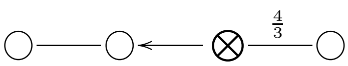




$G(3)^{(1)}$



$G(3)^{(2)}$



1.4.3 Construction des superalgèbres de Lie affines non tordues

On peut écrire [9, 23, 39] $\mathcal{G}(A;\tau) = \mathcal{H}'' \oplus \mathcal{G}'$, où $\mathcal{H}''$ est un supplémentaire de $\mathcal{H}' = [\mathcal{H},\mathcal{H}]$ dans $\mathcal{H}$ (notons que $\mathcal{H}'' = \{0\}$, sauf si $\mathcal{G}' \simeq \mathfrak{sl}(n,n)$, auquel cas $\dim(\mathcal{Z}(\mathcal{G})) = \dim(\mathcal{H}'') = 1$). On prend une forme bilinéaire supersymétrique invariante $(.,.)$ sur $\mathcal{G}$ telle que $(h',h'') = 0$ si $h' \in \mathcal{H}',\ h'' \in \mathcal{H}''$, et dont la restriction à $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ est non dégénérée. Notons que l'algèbre dérivée $\mathcal{G}'$ est orthogonale, pour une telle forme, au centre $\mathcal{Z}(\mathcal{G})$ (par invariance). On note $\mathcal{G}^0$ l'orthogonal de $\mathcal{Z}(\mathcal{G}) \oplus \mathcal{H}''$ par rapport à la forme $(.,.)$. On note π la projection $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^0$.

On pose

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = (1 \otimes \mathcal{G}) \oplus \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_0} \left(t^n \otimes \mathfrak{g}^0\right) \right),$$

et on y définit une structure de superalgèbre de Lie, en donnant à $t^n \otimes x$ le degré de $x \in \mathcal{G}$, et en posant

$$[t^m \otimes x, t^n \otimes y]_{\mathcal{L}(\mathcal{G})} = \begin{cases} t^{n+m} \otimes \pi([x,y]) & \text{si} \quad m+n \neq 0 \\ 1 \otimes [x,y] & \text{si} \quad m+n = 0. \end{cases}$$

Soit d la superdérivation paire qui agit sur $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ par $t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

On construit alors la superalgèbre de Lie

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{G}) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

où les éléments c et d sont décrétés être pairs, et où le supercrochet est défini comme

$$[t^k \otimes g + \lambda c + \mu d, t^{k'} \otimes g' + \lambda' c + \mu' d]_{\hat{\mathcal{L}}(\mathcal{G})} = \begin{cases} t^{k+k'}\pi([g,g']) + \mu k' t^{k'} g' - \mu' k t^k g & \text{si } k+\ell \neq 0 \\ [g,g']^0 + kt^k(\mu g' - \mu' g) + k(g,g')c & \text{si } k+\ell = 0. \end{cases}$$

Alors la superalgèbre de Lie affine non tordue $(\mathcal{G}(A;\tau))^{(1)}$ construite sur $(A;\tau)$ est

$$(\mathcal{G}(A;\tau))^{(1)} = \hat{\mathcal{L}}(\mathcal{G}(A;\tau)).$$

1.4.4 Construction des superalgèbres de Lie affines tordues

Les superalgèbres affines tordues [23, 9] $\mathcal{G}^{(m)}$ (avec $m \neq 1$) dépendent d'un automorphisme extérieur χ de $\mathcal{G}$. Ici m est le plus petit entier tel que $\chi^m = 1$. On peut décomposer $\mathcal{G}$ suivant les valeurs propres $e^{\frac{2i\pi k}{m}}$, $k \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, de χ

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{k=0}^{m-1} \mathcal{G}_{(k)},$$

où

$$\mathcal{G}_{(k)} = \left\{ g \in \mathcal{G} \middle| \chi(g) = e^{\frac{2i\pi k}{m}} g \right\}.$$

Ces sous-espaces vérifient, $\forall j, k \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$,

$$\left[\mathcal{G}_{(j)}, \mathcal{G}_{(k)}\right] \subset \mathcal{G}_{(j+k)}.$$

La superalgèbre affine tordue $\mathcal{G}^{(m)}$ est alors la sous-algèbre de $\mathcal{G}^{(1)}$ (voir section 1.4.3.) définie par

$$\mathcal{G}^{(m)} = \{ f(\theta) \otimes g | f(\theta + 2\pi) \otimes g = f(\theta) \otimes \chi(g) \}.$$

2 Algèbres de Hopf

2.1 Définitions de base

On se replace sur notre anneau R. Sauf mention du contraire, les produits tensoriels se feront par rapport à R.

2.1.1 Algèbres et cogèbres

Donnons une définition diagrammatique d'une R-algèbre [22].

Définition 23. *Une R-algèbre A est un R-module muni d'applications R-linéaires $\mu : A \otimes A \to A$ et $\eta : R \to A$ telles que les diagrammes suivants soient commutatifs.*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes I_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\
A \otimes R \arrow[ur, "I_A \otimes \eta"] \arrow[rr, "\sim", "a \otimes 1 \mapsto a"'] & & A
\end{tikzcd}$$

Un morphisme de R-algèbres f entre deux R-algèbres (A, μ_A, η_A) et (B, μ_B, η_B) est une application R-linéaire $f : A \to B$ telle que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \arrow[d, "\eta_A"'] \arrow[dr, "\eta_B"] & \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Les applications μ_A et η_A sont appelées respectivement multiplication et unité. L'unité usuelle de A est alors $1_A = \eta_A(1)$. Un sous-R-module X de A est appelé un idéal à gauche (resp. à droite) si $A \otimes X \subset X$ (resp. $X \otimes A \subset X$). Si X est un idéal bilatère (à gauche *et* à droite), A/X est une algèbre et on a un morphisme d'algèbres $\pi_X : A \to A/X$.

Si M est un R-module, on notera $\mathrm{g}_M : R \otimes M \xrightarrow{\sim} M$ la multiplication scalaire à gauche, et $\mathrm{d}_M : M \otimes R \xrightarrow{\sim} M$ la multiplication scalaire à droite. Si M et M' sont deux R-modules, on notera $\tau_{M,M'}$ le « flip », c'est-à-dire l'isomorphisme

$$\tau_{M,M'} : M \to M' : m \otimes m' \mapsto m' \otimes m.$$

En outre, on notera $\lambda_{M,M'}$ l'application R-linéaire naturelle $M^* \otimes_R M'^* \to (M' \otimes M)^*$, qui est un isomorphisme si M et M' sont projectifs de type fini.

Si $A = (A, \mu_A, \eta_A)$ est une algèbre, on appelle algèbre opposée l'algèbre $A^{\mathrm{op}} = (A, \mu_A^{\mathrm{op}}, \eta_A)$, où $\mu_A^{\mathrm{op}} = \mu_A \circ \tau_{A,A}$. Rappelons enfin que le produit tensoriel $A \otimes A'$ de deux R-algèbres A et A' possède de manière évidente une structure de R-algèbre, avec $\eta_{A \otimes A'} = \eta_A \otimes \eta_{A'}$ (où on a identifié R et $R \otimes_R R$) et $\mu_{A \otimes A'} = (\mu_A \otimes \mu_{A'}) \circ (I_A \otimes \tau_{A,A'} \otimes I_{A'})$.

La notion de cogèbre [22, 33, 16] est la notion duale.

Définition 24. *Une R-cogèbre est un R-module C, muni de deux applications R-linéaires $\Delta : C \to C \otimes C$ et $\varepsilon : C \to R$ telles que les diagrammes suivants soient commutatifs.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes I_C"] \\ C \otimes C \arrow[r, "I_C \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "g_V^{-1}"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "d_V^{-1} \,:\, c \mapsto c \otimes 1"] & \\ R \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon \otimes I_C"] \arrow[r, "I_C \otimes \varepsilon"'] & C \otimes R \end{tikzcd}$$

Un morphisme de R-cogèbres f entre deux R-cogèbres $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ est une application R-linéaire $f : C \to D$ telle que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\varepsilon_C"] & \\ D \arrow[r, "\varepsilon_D"'] & R \end{tikzcd}$$

Les applications Δ et ε sont appelées respectivement comultiplication et coünité. Remarquons que l'anneau R possède des structures naturelles de R-algèbre et de R-cogèbre telles que les applications unité et coünité de toute algèbre ou cogèbre soient des morphismes d'algèbre et de cogèbre respectivement. Ces structures sont données par $\mu(1 \otimes 1) = 1$, $\eta(1) = 1$, $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, $\varepsilon(1) = 1$. Si $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ est une cogèbre, on définit la cogèbre coopposée $C^{\mathrm{cop}} = (C, \Delta_C^{\mathrm{op}}, \varepsilon_C)$, où $\Delta_C^{\mathrm{op}} = \tau_{C,C} \circ \Delta_C$.

Définition 25. *Soit C une R-cogèbre. [33]*

- *Un sous-R-module $D \subset C$ est appelé coïdéal à gauche (resp. à droite) de C si $\Delta_C(D) \subset C \otimes D$ (resp. $\Delta_C(D) \subset D \otimes C$).*
- *Un sous-R-module $D \subset C$ est appelé coïdéal de C si $\varepsilon(D) = 0$ et si $\Delta_C(D) \subset (C \otimes D) \oplus (D \otimes C)$.*
- *Un sous-R-module $D \subset C$ est appelé une sous-R-cogèbre si $\Delta_C(D) \subset D \otimes D$ (c'est-à-dire si c'est à la fois un coïdéal à gauche et un coïdéal à droite).*
- *La R-cogèbre C est dite irréductible si deux sous-R-cogèbres de C ont toujours une intersection nontriviale.*

Si D est un coïdéal d'une cogèbre C, alors C/D est une cogèbre et l'on a un morphisme de cogèbre $\pi_D : C \to C/D$. Le produit tensoriel de deux cogèbres $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $C' = (C', \Delta_{C'}, \varepsilon_{C'})$ est muni d'une structure de cogèbre $C \otimes C' = (C \otimes C', \Delta_{C \otimes C'}, \varepsilon_{C \otimes C'})$, où $\varepsilon_{C \otimes C'} = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_{C'}$ et $\Delta_{C \otimes C'} = (I_C \otimes \tau_{C,C'} \otimes I_{C'}) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_{C'})$. Terminons par le théorème fondamental des cogèbres.

Théorème 6. *[33] Soient k un corps et $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une k-cogèbre. Une sous-k-cogèbre engendrée par un ensemble fini d'éléments de C, ou par un sous-k-espace vectoriel de dimension finie de C, est de dimension finie.*

2.1.2 Définition de bigèbre

Définition 26. *Une R-algèbre augmentée [16] est une R-algèbre $A = (A, \mu, \eta)$ munie d'une augmentation (ou coünité) ε, c'est-à-dire un morphisme d'algèbres $A \to R$.*

Si A est une algèbre augmentée, on a donc en particulier $\varepsilon \circ \eta = I_R$. On peut écrire $A = \mathrm{Im}(\eta) \oplus \ker(\varepsilon)$. On notera $\bar{A} = \ker(\varepsilon) \simeq \mathrm{coker}(\eta)$.

Définition 27. *Si $A = (A, \mu, \eta, \varepsilon)$ est une algèbre augmentée, on définit l'espace des éléments indécomposables [33] $\mathscr{Q}(A)$ comme le conoyau* $\mathrm{coker}\left[\bar{\mu} \ : \ \bar{A} \otimes \bar{A} \to \bar{A}\right]$, *qu'on peut encore décrire comme $\mathscr{Q}(A) = \bar{A}/\bar{A}^2$.*

Définition 28. *Une R-algèbre (B, μ_B, η_B) qui est aussi une R-cogèbre $(B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ est appelée une R-bigèbre si elle vérifie une des deux conditions équivalentes suivantes*
- *Δ_B et ε_B sont des morphismes de R-algèbres.*
- *μ_B et η_B sont des morphismes de R-cogèbres.*

Une application $f \ : \ C \to D$ est un morphisme de R-bigèbres si c'est à la fois un morphisme de R-algèbres et un morphisme de R-cogèbres.

L'équivalence des deux conditions devient évidente en examinant les diagrammes correspondants. D'après la définition ci-dessus, la condition pour que Δ_B soit un morphisme de R-algèbres s'écrit

$$\begin{tikzcd} B \otimes B \arrow[r, "\Delta_B"] \arrow[d, "\mu_B"'] & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[d, "(\mu_B \otimes \mu_B) \circ \left(I_B \otimes \tau_{B,B} \otimes I_B\right)"] \\ B \arrow[r, "\Delta_B"'] & B \otimes B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "1_R^{-1} = \mathrm{d}_R^{-1}"] \arrow[d, "\eta_B"] & R \otimes R \arrow[d, "\eta_B \otimes \eta_B"] \\ B \arrow[r, "\Delta_B"'] & B \otimes B \end{tikzcd}$$

Et le fait que ε_B soit un morphisme de R-algèbres donne le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} B \otimes B \arrow[r, "\varepsilon_B \otimes \varepsilon_B"] \arrow[d, "\mu_B"'] & R \otimes R \arrow[d, "\mathrm{g}_R = \mathrm{d}_R = \mu_R"] \\ B \arrow[r, "\varepsilon_B"'] & R \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[d, "\eta_B"'] \arrow[dr, "I_R = \eta_R"] & \\ B \arrow[r, "\varepsilon_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Notons que la commutativité des diagrammes de droite se réduit aux conditions $\Delta_B(1_B) = 1_B \otimes 1_B$ et $\varepsilon_B(1_B) = 1$.

Si (A, μ_A, η_A) est une R-algèbre et $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une R-cogèbre (et donc en particulier si $A = C$ est une R-bigèbre), on peut définir la convolution sur $\mathrm{Hom}_R(C, A)$: si $f, g \in \mathrm{Hom}_R(C, A)$ et $c \in C$,

$$(f * g)(c) = (\mu_A \circ (f \otimes g)) \left(\Delta_C \left(c\right)\right).$$

Cette opération fait de $\mathrm{Hom}_R\left(C, A\right)$ une R-algèbre dont l'unité est $\eta_A \circ \varepsilon_C$.

2.1.3 Premières notions sur les bigèbres

Si $B = (B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ est une R-bigèbre, on définit la bigèbre opposée $B^{\mathrm{op}} = (B, \mu^{\mathrm{op}}, \eta, \Delta, \varepsilon)$, la bigèbre coopposée $B^{\mathrm{cop}} = (B, \mu, \eta, \Delta^{\mathrm{op}}, \varepsilon)$ et la bigèbre opposée-coopposée $B^{\mathrm{op,cop}} = (B, \mu^{\mathrm{op}}, \eta, \Delta^{\mathrm{op}}, \varepsilon)$. Si $1 \leq p \leq n$, l'ensemble des $(p, n-p)$-mélanges est

$$\mathfrak{S}_{p,n-p} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(p);\ \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \ldots < \sigma(n)\}.$$

Théorème 7. *Soit M un R-module. Il existe une unique structure de R-bigèbre sur $T(M)$ telle que $\Delta(m) = 1 \otimes m + m \otimes 1$ et $\varepsilon(m) = 0$ $(\forall m \in M)$. Cette structure de bigèbre est cocommutative et, pour tous $m_1, \ldots, m_n \in V$,*

$$\varepsilon(m_1, \ldots, m_n) = 0,$$

$$\Delta(m_1, \ldots, m_n) = 1 \otimes m_1 \ldots m_n + \sum_{p=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p,n-p}} m_{\sigma(1)} \ldots m_{\sigma(p)} \otimes m_{\sigma(p+1)} \ldots m_{\sigma(n)}$$
$$+ m_1 \ldots m_n \otimes 1.$$

On dit qu'un élément x d'une R-cogèbre C est primitif si $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$. L'ensemble $\mathcal{P}(C) = \{x \in C | \Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1\}$ des éléments primitifs de C est alors une R-algèbre de Lie (pour le crochet $[x, y]_{\mathrm{Lie}(\mathcal{P}(C))} = xy - yx$). Un morphisme $f : E \to E'$ entre deux bigèbres E et E' induit un morphisme d'algèbres de Lie $f\big|_{\mathcal{P}(E)} : \mathrm{Lie}(\mathcal{P}(E)) \to \mathrm{Lie}(\mathcal{P}(E'))$. Le résultat suivant révèle l'importance des éléments primitifs.

Proposition 7. *Soient B une R-bigèbre, $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{P}(B)$. Si M est un R-module de base $(m_1, \ldots, m_n)$, l'unique morphisme d'algèbres $f : T(M) \to B$ tel que $f(m_i) = x_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$ est un morphisme de R-bigèbres. En particulier,*

$$\Delta(x_1 \ldots x_n) = 1 \otimes m_1 \ldots m_n$$
$$+ \sum_{p=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p,n-p}} m_{\sigma(1)} \ldots m_{\sigma(p)} \otimes m_{\sigma(1)} \ldots m_{\sigma(n)} + m_1 \ldots m_n \otimes 1.$$

2.1.4 Notation de Sweedler

Si $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ est une bigèbre, on notera par la suite

$$\Delta^{(n)} = \left(\Delta \otimes I_H^{\otimes(n-1)}\right) \circ \ldots \circ (\Delta \otimes I_H) \circ \Delta$$

et $\mu^{(n)} = \mu \circ (\mu \otimes I_H) \circ \ldots \circ \left(\mu \otimes I_H^{\otimes(n-1)}\right)$. En présence d'une bigèbre H, on utilise souvent le raccourci d'écriture suivant, dû à Sweedler : pour $\Delta(x)$, qui est a priori une somme de la forme $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i'$, on écrit simplement $\sum_{(x)} x' \otimes x''$.

La coassociativité affirme que $(\Delta \otimes I)\Delta = (I \otimes \Delta)\Delta$. Si on définit $\Delta^{(i,n)} = I_H^{\otimes(i-1)} \otimes \Delta \otimes I_H^{\otimes(n-i)}$ (alors $\Delta^{(1,1)} = \Delta$, $\Delta^{(1,2)} = \Delta \otimes I_H$, $\Delta^{(2,2)} = I_H \otimes \Delta$), on trouve que, quels que soient $1 \leq i_j \leq j$, $2 \leq j \leq n$, toutes les expressions

$$\Delta^{(i_n,n)} \circ \Delta^{(i_{n-1},n-1)} \circ \cdots \circ \Delta^{(1,1)}$$

sont égales, et valent $\Delta^{(n)}(x)$. En conséquence, on pourra écrire — et on écrira —

$$\Delta^{(n)}(x) = \sum_{(x)} x' \otimes x'' \otimes \ldots \otimes x^{(n+1)}.$$

Avec cette notation, la condition de coünité se réécrit

$$\sum_{(h)} h'\varepsilon(h'') = \sum_{(h)} \varepsilon(h')h'' = h.$$

La condition de compatibilité de bigèbre (en sus de $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, $\eta(1) = 1$ et $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$) s'écrit

$$\sum_{(xy)} (xy)' \otimes (xy)'' = \sum_{(x),(y)} x'y' \otimes x''y''.$$

2.2 Modules et comodules

2.2.1 Définitions et opérations élémentaires

Définition 29. *Si $A = (A, \mu_A, \eta_A)$ est une R-algèbre, on dit que le R-module M est un A-module (à gauche) s'il existe une application R-linéaire $\mu_M \; : \; A \otimes M \to M$ telle que les diagrammes suivants soient commutatifs.*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "\mu_A \otimes I_M"] \arrow[d, "I_A \otimes \mu_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\mu_M"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\mu_M"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \otimes M \arrow[r, "\eta_A \otimes I_M"] \arrow[d, "g_M"'] & A \otimes M \arrow[dl, "\mu_M"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Une application R-linéaire f entre deux A-modules M et M' est appelée un morphisme de A-modules si $\mu_{M'} \circ (I_A \otimes f) = f \circ \mu_M$, c'est-à-dire si le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} A \otimes M \arrow[r, "I_A \otimes f"] \arrow[d, "\mu_M"'] & A \otimes M' \arrow[d, "\mu_{M'}"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

La notion de A-module à droite se définit de manière strictement analogue. Notons qu'un A-module à droite est un A^{op} -module à gauche.

Définition 30. *Si $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ est une R-cogèbre, on dit que le R-module M est un C-comodule (à gauche) s'il existe une application R-linéaire $\delta_M \; : \; M \to C \otimes M$ telle que les diagrammes suivants soient commutatifs.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta_M"] \arrow[d, "\delta_M"'] & C \otimes M \arrow[d, "I_C \otimes \delta_M"] \\ C \otimes M \arrow[r, "\Delta \otimes I_M"'] & C \otimes C \otimes M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \otimes M \arrow[d, "g_M"'] & C \otimes M \arrow[l, "\varepsilon_C \otimes I_M"'] \\ M \arrow[ur, "\delta_M"'] & \end{tikzcd}$$

Une application R-linéaire g entre deux C-comodules M et M' est appelée un morphisme de C-comodules si $(I_C \otimes f) \circ \delta_M = \delta_{M'} \circ f$, c'est-à-dire si le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta_M"] \arrow[d, "g"'] & C \otimes M \arrow[d, "I_C \otimes g"] \\ M' \arrow[r, "\delta_{M'}"] & C \otimes M' \end{tikzcd}$$

Dans la notation de Sweedler, si on écrit, pour $m \in M$, $\delta_M(v) = \sum_{(m)} m_C \otimes m_M$, la condition de coassociativité est

$$\sum_{(m)} (m_C)' \otimes (m_C)'' \otimes m_M = \sum_{(m)} m_C \otimes (m_M)_C \otimes (m_M)_M.$$

On notera ces deux expressions égales[12] $\sum_{(n)} n^{(-2)} \otimes n^{(-1)} \otimes n^{(0)}$. La condition pour que $f : V \to V'$ soit un morphisme de C-comodules s'écrit, pour $m \in M$,

$$\sum_{(m)} m^{(-1)} \otimes f(m^{(0)}) = \sum_{(f(m))} (f(m))^{(-1)} \otimes (f(m))^{(0)}.$$

Si C est une cogèbre, un sous-C-comodule W d'un C-comodule V est un sous-R-module tel que $\delta_V(W) \subset C \otimes W$.

Si A est une algèbre, on appellera A-bimodule un A-module à gauche qui est aussi un A-module à droite, et dont les actions dextre et senestre commutent : $\mu_L \circ \mu_R = \mu_R \circ \mu_L$. De même, si C est une cogèbre, on appellera C-bicomodule tout C-comodule à gauche (de coaction $\delta_L : V \to C \otimes V$) possédant une structure de C-comodule à droite $\delta_R : V \to V \otimes C$ telle que $(\delta_L \otimes I_C) \circ \delta_R = (I_C \otimes \delta_R) \circ \delta_L$[13].

Soient A_1, A_2 des algèbres. On sait que, si M_1 est un A_1-module et M_2 un A_2-module, $M_1 \otimes M_2$ possède une structure de $A_1 \otimes A_2$-module : si $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ et $(m_1 \otimes m_2) \in M_1 \otimes M_2$,

$$(a_1 \otimes a_2).(m_1 \otimes m_2) = a_1.m_1 \otimes a_2.m_2.$$

Lorsque $A = A_1 = A_2$ est une bigèbre, le coproduit permet de donner au produit tensoriel de deux A-modules une structure de A-module : si $a \in A$ et $(m_1 \otimes m_2) \in M_1 \otimes M_2$,

$$a.(m_1 \otimes m_2) = \sum_{(a)} (a'.m_1 \otimes a''.m_2).$$

De même, si C_1 et C_2 sont des bigèbres, si N_1 est un C_1-comodule et N_2 un C_2-comodule, le produit tensoriel $C_1 \otimes C_2$ est doté d'une structure de $C_1 \otimes C_2$-comodule

$$\delta_{N_1 \otimes N_2} = I_{C_1} \otimes \tau_{N_1, C_2} \otimes I_{N_2} \ : \ \begin{array}{rcl} N_1 \otimes N_2 & \to & (C_1 \otimes C_2) \otimes (N_1 \otimes N_2) \\ n_1 \otimes n_2 & \mapsto & \sum_{(n_1),(n_2)} (n_1^{(-1)} \otimes n_2^{(-1)}) \otimes (n_1^{(0)} \otimes n_2^{(0)}). \end{array}$$

[12] Dans le cas d'un C-comodule à droite N, la coassociativité s'écrit $\sum_{(n),(n_C)} n_N \otimes (n_C)' \otimes (n_C)'' = \sum_{(n),(n_V)} (n_N)_N \otimes (n_N)_C \otimes n_C$. Dans ce cas, on se propose de noter ces deux expressions égales $\sum_{(n)} n^{(0)} \otimes n^{(1)} \otimes n^{(2)}$.

[13] Ces deux expressions s'écrivent, lorsqu'évaluées en $x \in M$, $\sum_{(x)} (x_M)_C \otimes (x_M)_C \otimes x_C$ et $\sum_{(x)} x_C \otimes (x_M)_M \otimes (x_M)_C$. On les notera toutes deux $\sum_{(x)} x^{(-1)} \otimes x^{(0)} \otimes x^{(1)}$.

2.2.2 Structures mixtes

Il arrive qu'une algèbre A subisse l'action ou la coaction d'une bigèbre. L'examen de la compatibilité des différentes structures conduit aux notions suivantes.

Définition 31. *Soient $H = (H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ une R-bigèbre, $A = (A, \mu_A, \eta_A)$ une R-algèbre. On dit que A est une H-comodule-algèbre s'il existe une coaction $\delta_A : A \to H \otimes A$ qui fait de A un H-comodule, et si le produit $\mu_A : A \otimes A \to A$ et la coünité $\eta_A : R \to A$ sont des morphismes de H-comodules.*

Cette dernière condition est équivalente au fait que la coaction $\delta_A : A \to H \otimes A$ soit un morphisme d'algèbres, ce qui s'exprime par la formule

$$\sum_{(ab)} (ab)^{(-1)} \otimes (ab)^{(0)} = \sum_{(a),(b)} a^{(-1)} b^{(-1)} \otimes a^{(0)} b^{(0)}$$

ou par la commutativité des diagrammes suivants.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\delta_A \otimes \delta_A"] \arrow[d, "\mu_A"'] & (H \otimes A) \otimes (H \otimes A) \arrow[d, "\mu_{H \otimes A}"] \\
A \arrow[r, "\delta_A"'] & H \otimes A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\eta_{H \otimes A} = \eta_H \otimes \eta_A"'] & A \arrow[d, "\delta_A"] \\
 & H \otimes A
\end{tikzcd}$$

Définition 32. *Soient H une bigèbre et M un H-module (M, μ_M) qui est aussi une algèbre (M, μ, η_M). On dit que M est une H-module-algèbre si les diagrammes suivants sont commutatifs.*

$$\begin{tikzcd}
H \otimes M \arrow[r, "\mu_M"] & M \\
H \otimes M \otimes H \otimes M \arrow[u, "(\mu \otimes \mu) \circ (I_H \otimes \tau_{M,H} \otimes I_M)"] \arrow[r, "\mu_M \otimes \mu_M"'] & M \otimes M \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \otimes M \arrow[r, "\mu_M"] & M \\
H \otimes R \arrow[u, "I_H \otimes \eta_M"] \arrow[r, "\varepsilon_H \otimes I_R"'] & R \arrow[u, "\eta_M"']
\end{tikzcd}$$

Soient H une bigèbre, (M, δ_M) un H-comodule qui est aussi une R-cogèbre $(M, \Delta_M, \varepsilon_M)$. On dit que M est une H-comodule-cogèbre si les diagrammes suivants sont commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\delta_M"] \arrow[d, "\Delta_M"'] & H \otimes M \arrow[d, "\Delta_{H \otimes M}"] \\
M \otimes M \arrow[r, "\delta_M \otimes \delta_M"'] & H \otimes M \otimes H \otimes M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\delta_M"] \arrow[d, "\varepsilon_M"'] & H \otimes M \arrow[d, "I_H \otimes \varepsilon_M"] \\
R \arrow[r, shift left, "\eta_H \otimes I_R"] & R \arrow[l, shift left, "\varepsilon_H \otimes I_R"]
\end{tikzcd}$$

Soient H une bigèbre, (M, μ_M) un H-module qui est aussi une R-cogèbre $(M, \Delta_M, \varepsilon_M)$. On dit que M est une H-module-cogèbre si les diagrammes suivants sont commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
H \otimes M \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "(I_H \otimes \tau_{M,H} \otimes I_M) \circ (\Delta_H \otimes \Delta_H)"'] & M \arrow[d, "\Delta_M"] \\
H \otimes M \otimes H \otimes M \arrow[r, "\mu_M \otimes \mu_M"'] & M \otimes M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \otimes M \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "I_H \otimes \varepsilon_M"'] & M \arrow[d, "\varepsilon_M"] \\
H \otimes R \arrow[r, "\varepsilon_H \otimes I_R"] & R
\end{tikzcd}$$

2.3 Algèbres de Hopf

2.3.1 Premières définitions

Définition 33. *Une R-algèbre de Hopf H est une k-bigèbre $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ munie d'une antipode S, c'est-à-dire une application R-linéaire $S : H \to H$ vérifiant*

$$S * I_H = I_H * S = \eta \circ \varepsilon.$$

Un morphisme de R-algèbres de Hopf est un morphisme de R-bigèbres commutant avec les antipodes.

La condition pour qu'une application R-linéaire $S : H \to H$ soit une antipode s'exprime par la formule

$$\mu \circ (S \otimes I_H) \circ \Delta = \mu \circ (I_H \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon,$$

ou, en notation de Sweedler, pour $x \in H$,

$$\sum_{(x)} S(x')x'' = \sum_{(x)} x'S(x'') = \varepsilon(x),$$

ou encore par la commutativité du diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[r, "S \otimes I_H"] & H \otimes H \arrow[dr, "\mu_H"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta_H"] \arrow[rr, "\varepsilon_H"] \arrow[dr, "\Delta_H"'] & & k \arrow[r, "\eta_H"] & H \\
 & H \otimes H \arrow[r, "I_H \otimes S"'] & H \otimes H \arrow[ur, "\mu_H"'] &
\end{tikzcd}$$

Remarquons que l'antipode, lorsqu'elle existe, est unique. Si H est commutative ou cocommutative, $S^2 = I_H$.

L'antipode vérifie $S(1) = 1$, $\varepsilon_H \circ S = S$, $S(hh') = S(h')S(h)\, \forall h, h' \in H$, $\tau_{H,H} \circ (S \otimes S) \circ \Delta_H = \Delta_H \circ S$. L'antipode est donc un morphisme de bigèbres entre H et $H^{\mathrm{op,cop}}$. En outre, tout morphisme de bigèbres entre deux algèbres de Hopf est en fait un morphisme d'algèbres de Hopf.

Définition 34. *Une R-algèbre de Hopf graduée $H = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_i$ est dite connexe si elle vérifie une des deux propriétés équivalentes suivantes.*
- *L'unité η établit un isomorphisme entre R et H_0.*
- *La coünité ε établit un isomorphisme entre H_0 et R.*

Cette définition exprime le fait que la coünité η soit une augmentation de l'algèbre sous-jacente H. On a alors la décomposition $H = \mathrm{Im}(\eta) \oplus \ker(\varepsilon) = H_0 \oplus \bar{H}$. Dans ce cadre, l'ensemble des éléments primitifs est

$$\mathcal{P}(H) = \ker\left(\bar{H} \to \bar{H} \otimes \bar{H}\right) = \bar{H}/\bar{H}^2.$$

2.3.2 Exemples d'algèbres de Hopf

Si X est un ensemble, on note $R[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans R en les variables $x \in X$. Cet ensemble $R[X]$ a une structure naturelle de cogèbre : $\varepsilon_{R[X]}(x) = 1,\ \Delta_{R[X]}(x) = x \otimes x,\ \forall x \in X$. L'algèbre duale de cette cogèbre est l'algèbre des fonctions sur X.

Si Δ est un monoïde d'unité e, $R[\Delta]$ possède une structure de bigèbre, avec, pour tous $x, y \in \Delta$, $\mu(x \otimes y) = xy$ et $\eta(1) = e$. En effet, on a bien $\Delta_{R[\Delta]}(xy) = xy \otimes xy = (x \otimes x)(y \otimes y) = \Delta(x)\Delta(y)$. Si G est un groupe, l'inverse induit une antipode $S(g) = g^{-1} \quad \forall g \in G$ sur $R[G]$. De plus, si Δ et Δ' sont des groupes,

$$R[\Delta \times \Delta'] \simeq R[\Delta] \otimes R[\Delta'].$$

On définit maintenant, si B est une bigèbre, l'ensemble des éléments « group-like » de B comme $\mathscr{G}(B) = \{b \in B \,|\, \Delta(b) = b \otimes b\}$ (on a toujours $1_B \in \mathscr{G}(B)$).

Proposition 8. *Si B est une bigèbre, $\mathscr{G}(B)$ est un monoïde unitaire. Si H est une algèbre de Hopf dont l'antipode est inversible, $\mathscr{G}(H)$ est un groupe. En outre, pour tout groupe G, $\mathscr{G}(R[G]) = G$.*

D'autres exemples d'algèbres de Hopf sont fournis par les duaux des exemples ci-dessus lorsque X est fini, par les (super)algèbres enveloppantes $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et plus généralement par les (super)algèbres enveloppantes quantifiées $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$.

2.3.3 Algèbres de Hopf topologiques

Dans ce paragraphe, R sera plus spécifiquement l'anneau $\mathbb{C}[[h]]$ des séries à coefficients dans $\mathbb{C}$. C'est un anneau local, d'idéal maximal $h\mathbb{C}[[h]]$. On a $\mathbb{C}[[h]] \simeq \varprojlim_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}[h]/h^n\mathbb{C}[h]$: R est donc complet séparé pour la topologie h-adique. De même, si M est un R-module, on définit la h-valuation

$$\nu_M \ : \ M \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \ : \ m \in M \mapsto \begin{cases} i & \text{si } m \in h^iM/h^{i+1}M \\ +\infty & \text{si } m \in \cup_{i\in\mathbb{N}} h^jM. \end{cases}$$

On a alors une quasi-métrique sur M $d_M(m,n) = 2^{-\nu_M(m-n)}$ pour $m, n \in M$, qui définit une topologie pour laquelle tout homomorphisme de R-modules est automatiquement continu. Le R-module M est dit séparé si $\overline{\{0\}} = \{0\}$ (ce qui est équivalent à $\cap_{n\in\mathbb{N}_0} h^nM = \{0\}$). Dans ce cas, d_M est une métrique. Notons que dans tous les cas $M/\left(\cap_{n\in\mathbb{N}_0} h^nM\right)$ est séparé.

Nous notons $(\hat{M}, \iota \ : \ M \to \hat{M})$ la solution du problème universel suivant : pour tout R-module P complet séparé et tout morphisme de R-modules $\phi \ : \ M \to P$, il existe un unique morphisme $\hat{\phi} \ : \ \hat{M} \to P$ tel que $\phi = \hat{\phi} \circ \iota$. Le R-module $\hat{M}$ est séparé, complet, et $\overline{\iota(M)} = \hat{M}$. On a $\hat{M} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}_0} h^nM$. Si M est séparé, ι est injectif et la topologie de $\hat{M}$ coïncide avec la topologie induite par celle de M. On dit que M est topologiquement libre s'il possède un sous-module libre N tel que $M = \overline{N}$. Alors il existe un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel V tel que

$$M = V[[h]] = \left\{ \sum_{i\geq 0} v_ih^i \middle| v_i \in V,\ i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Un module topologiquement libre est séparé complet. On a de plus le lemme suivant.

Lemme 1. *Si M est un R-module séparé complet, et si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, il existe une bijection naturelle* $\mathrm{Hom}_R(V[[h]], M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, M)$.

Proposition 9. *Un K-module est topologiquement libre si et seulement s'il est séparé, complet et sans torsion.*

Définition 35. *Soit V un R-module. Une famille $(v_i)_{i\in I}$ d'éléments de V est appelée une base commode de V si*

- *Les éléments v_i, $i \in I$, sont R-linéairement indépendants.*
- *Le R-module V est engendré topologiquement par ces éléments.*
- *L'ensemble d'indices I est partiellement ordonné.*
- *Il existe une application $p : I \to \mathbb{N}$ respectant cet ordre telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|p^{-1}(\{n\})| < \infty$.*

Si M et N sont deux R-modules, on définit le produit tensoriel topologique de M et de N comme

$$M\widehat{\otimes}N = \widehat{M \otimes_R N} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{M \otimes_R N}{h^n M \otimes_R N}.$$

On a les propriétés triviales $M\widehat{\otimes}N \simeq N\widehat{\otimes}N$, $R\widehat{\otimes}M \simeq M\widehat{\otimes}R \simeq M$, $M[[h]]\widehat{\otimes}N[[h]] = (M \otimes N)[[h]]$. Les notions d'algèbre topologique, de cogèbre topologique, de bigèbre topologique et d'algèbre de Hopf topologique se définissent de manière analogue au cas des R-algèbres « non topologiques », mais en remplaçant le produit tensoriel par le produit tensoriel topologique ; de même pour les notions de modules, comodules, bidules topologiques et pour les notions de morphismes d'algèbres topologiques, cogèbres topologiques, etc. Enfin, si A est une algèbre topologique séparée complète, et si $a \in A$, on peut définir l'exponentielle $e^{ha} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a^n \frac{h^n}{n!}$.

Définissons la notion de déformation formelle, pour un corps général k.

Définition 36. *Une déformation formelle d'une k-algèbre (resp. algèbre de Hopf) A est une $k[[h]]$-algèbre (resp. algèbre de Hopf) $\mathcal{A}$, isomorphe à $A[[h]]$ comme $k[[h]]$-module, telle que $\mathcal{A}/h\mathcal{A}$ est isomorphe à A en tant que k-algèbre (resp. algèbre de Hopf).*

2.4 Constructions duales

2.4.1 Le dual restreint d'une algèbre de Hopf

Soit C une cogèbre. On peut munir le dual C^* d'une structure d'algèbre $(C^*, \mu_{C^*}, \eta_{C^*})$, où $\eta_{C^*} = \varepsilon_C$ et $\mu_{C^*} = {}^t\Delta \circ \lambda_{C,C} \circ \tau_{C^*,C^*}$. Alors les coïdéaux de C correspondent aux sous-algèbres de C^*, et les coïdéaux à gauche (resp. à droite) de C correspondent aux idéaux à gauche (resp. à droite) de C^*. Le dual A^* d'une algèbre A n'est une cogèbre que si A est libre de rang fini, avec bien sûr $\varepsilon_{A^*} = \eta_A$ et $\Delta_{A^*} = \tau_{A,A} \circ \lambda_{A,A}^{-1} \circ {}^t\mu_A$.

Lorsque H est une algèbre de Hopf sur un anneau A, son dual H^* possède une structure de H-bimodule, déterminée par, si $a, b \in H$ et $\lambda \in H^*$,

$$(a\lambda b)(x) = \lambda(bxa),\ \forall x \in H.$$

Le dual restreint est alors $H^\circ = \{\lambda \in H^* \,|\, H\lambda H \text{ est un } A\text{−module de type fini}\}$. Notons qu'on a aussi

$$\begin{aligned} H^\circ &= \{\lambda \in H^* \,|\, H\lambda \text{ est un } A\text{−module de type fini}\} \\ &= \{\lambda \in H^* \,|\, \lambda H \text{ est un } A\text{−module de type fini}\} \\ &= \{\lambda \in H^* \,|\, \lambda \in \lambda_{H,H}(H^* \otimes H^*)\}. \end{aligned}$$

En transposant les opérations de $H = (H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$, on obtient une structure de Hopf $H^\circ = (H^\circ, \mu_{H^\circ}, \eta_{H^\circ}, \Delta_{H^\circ}, \varepsilon_{H^\circ}) = \left(H^\circ, {}^t\Delta_H, {}^t\varepsilon_H, {}^t\mu_H, {}^t\eta_H\right)$ sur le dual restreint[14] (notamment parce que dans ce cas $\lambda_{H,H}$ est un isomorphisme entre $H^\circ \otimes H^\circ$ et $(H \otimes H)^\circ$). Lorsque H est libre de type fini, $H^\circ \simeq H^*$.

Soit $\rho : H \to \mathrm{End}(V)$ une représentation de dimension finie de H. Si on note $\rho^* : (\mathrm{End}(V))^* \to H^*$, $\rho^*((\mathrm{End}(V))^*)$ est appelé l'espace des coefficients de la représentation ρ. Le dual restreint est alors la somme des espaces de coefficients de toutes les représentations de dimension finie de H.

Lorsque H est une R-algèbre de Hopf h-adique (topologique), la complétion de son dual restreint $\widehat{H^\circ} = \overline{H^\circ}^{H^*}$ est une algèbre de Hopf h-adique.

2.4.2 Produits croisés et bicroisés de bigèbres

La notion de produit bicroisé de bigèbres [22], sur laquelle se base la construction du double quantique, est une généralisation du produit bicroisé de groupes, dont le produit semi-direct est un cas particulier.

Définition 37. *Une paire (F, G) de groupes est dite liée s'il existe une action à gauche $\mathcal{L}(f, g) = f.g$ de F sur G et une action à droite $\mathcal{R}(f, g) = f^g$ de G sur F telles que, pour tous $f, f' \in F$ et $g, g' \in G$,*

$$(ff')^g = f^{f'.g},\ e.(gg') = (f.g)(f^g.g'),\ f.1_G = 1_G,\ 1_F^g = 1_F.$$

Proposition 10. *Soit (F, G) une paire de groupes liée. Il existe une unique structure de groupe sur $F \times G$, appelée produit bicroisé $F \bowtie G$, telle que $(f, g)(f', g') = \left(f(g.f'), g^{f'}g'\right)$.*

Alors F et $F \times \{e_G\}$, G et $\{e_F\} \times G$, sont des paires de groupes isomorphes et un élément $(f, g) \in F \bowtie G$ s'écrit d'une manière unique $(f, g) = (f, 1)(1, g)$. Si les deux actions sont triviales, on retrouve le produit direct. Si G agit trivialement et F agit par automorphismes de G, on retrouve le produit semi-direct.

Définition 38. *Une paire de bigèbres (A, X) est dite liée s'il existe des applications linéaires $\alpha : X \otimes A \to X$ et $\beta : X \otimes A \to A$ faisant de X une A-module-cogèbre et de A une X-module-cogèbre à droite, le tout vérifiant, pour tous $a, b \in A$ et $x, y \in X$,*

$$a.(xy) = \sum_{(a),(x)} (a'.x')\left(a''^{x''}.y\right),\ a.1 = \varepsilon(a)\,1;$$

$$(ab)^x = \sum_{(b),(x)} a^{b'.x'} b''^{x''},\ 1^x = \varepsilon(x)\,1;$$

[14] Cette opération $H \mapsto H^\circ$ peut être définie sur les cogèbres à valeurs dans les algèbres, et définit en fait un foncteur adjoint au foncteur $A \mapsto A^*$.

$$\sum_{(a),(x)} a'^{x'} \otimes a''.x'' = \sum_{(a),(x)} a''^{x''} \otimes a'.x'.$$

Lorsque les deux bigèbres A et B sont cocommutatives, la dernière condition est toujours satisfaite. Le lien avec la notion de groupes liée est simple : si (G, H) est une paire de groupes liée, $(k[G], k[H])$ est une paire de bigèbres liée.

Proposition 11. *Si (A, X) est une paire de bigèbres liée, il existe une unique structure de bigèbre $A \bowtie X$ sur $A \otimes X$, appelée produit bicroisé de bigèbres, telle que*
- $(a \otimes x)(b \otimes y) = \sum_{(b),(x)} a(x'.b') \otimes x''^{b''} y,$
- $\Delta_{A\bowtie X}(a \otimes x) = \sum_{(a),(x)} (a' \otimes x') \otimes (a'' \otimes x''),$
- $\varepsilon_{A\bowtie X}(a \otimes x) = \varepsilon(a).\varepsilon(x),$
- $(a \otimes x)(1 \otimes 1) = (1 \otimes 1)(a \otimes x).$

On a des morphismes injectifs de bigèbres $A \to X \otimes A$ et $X \to A \otimes X$ et on a $(a \otimes x) = (a \otimes 1)(1 \otimes x)$. Si les deux bigèbres ont des antipodes, leur produit bicroisé est une algèbre de Hopf, d'antipode

$$S(a \otimes x) = \sum_{(x),(a)} (S_X(x'').S_A(a'')) \otimes S_X(x')^{S_A(a')}.$$

Si G et H sont des groupes, on a $k[G] \bowtie k[H] \simeq k[G \bowtie H]$. On parle de produit croisé de bigèbres si A agit sur X par homothétie : $\forall a \in A,\ \forall x \in X\ x^a = \varepsilon(a)x$, et si X fait de A une X-module algèbre. La condition de paire liée s'écrit

$$\sum_{(x)} x' \otimes (x''.a) = \sum_{(x)} a'' \otimes (a'.x)$$

et la définition du produit croisé $A \rtimes X$ (pour $a, b \in A;\ x, y \in X$)

$$(a \otimes x).(b \otimes y) = \sum_{(x)} a(x'.b) \otimes (x''.y).$$

On retrouve le produit tensoriel de bigèbres si l'action de X sur A est également triviale.

2.4.3 Les actions adjointes et coadjointes

L'action adjointe [22, 33] à gauche[15] d'une algèbre de Hopf H fait de cette dernière une H-module-algèbre (à gauche). L'action de $h \in H$ sur $x \in H$ s'écrit $h.x = \sum_{(h)} h'xS(h'')$. L'action adjointe à droite s'écrit (pour l'action de $h \in H$ sur $x \in H$) $x^h = \sum_{(h)} S(h')xh''$.

Il y a également des actions dites coadjointes à gauche et à droite [22, 33], qui font de $(H^{\mathrm{op}})^*$ une H-module-cogèbre à gauche ou à droite. Elles s'écrivent

$$\begin{cases} \langle a, x.f\rangle = \sum_{(x)} \langle S^{-1}(x'')ax', f\rangle \\ \langle a, f^x\rangle = \sum_{(x)} \langle x''aS^{-1}(x'), f\rangle. \end{cases}$$

[15] Cette notion correspond à la notion d'action adjointe d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, via le passage de $\mathfrak{g}$ à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

2.4.4 Dualité de Hopf

Définition 39. *Soient* $A = (A, \mu_A, \eta_A, \Delta_A, \varepsilon_A, S_A)$ *et* $H = (H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H)$ *deux* R*-algèbres de Hopf. Une dualité de Hopf entre* A *et* H *est une forme* R*-bilinéaire* $\langle ., . \rangle \ : \ A \times H \to R$ *vérifiant, pour* $a, b \in A$ *et* $h, R \in H$,

- $\langle ab, h \rangle = \sum_{(h)} \langle a, h' \rangle \langle b, h'' \rangle$,
- $\langle a, hR \rangle = \sum_{(a)} \langle a', h \rangle \langle a'', R \rangle$,
- $\langle \eta_A(1), h \rangle = \varepsilon_H(h)$,
- $\langle a, \eta_H(1) \rangle = \varepsilon_A(a)$,
- $\langle S_A(a), h \rangle = \langle a, S_H(h) \rangle$.

Si les deux algèbres de Hopf $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$ et $H = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_i$ sont graduées, on demande souvent que la dualité $\langle ., . \rangle$ soit graduée, ce qui signifie que $\langle A_i, H_j \rangle = \{0\}$ si $i - j \neq 0$. Il sort facilement des définitions que les idéaux d'annulation d'une dualité de Hopf

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}(A) = \{a \in A | \langle a, h \rangle = 0 \ \forall h \in H\} \\ \mathcal{I}(H) = \{h \in H | \langle a, h \rangle = 0 \ \forall a \in A\} \end{array} \right.$$

sont des idéaux de Hopf de A et H respectivement. Si les algèbres de Hopf et la dualité sont graduées, $\mathcal{I}(A)$ et $\mathcal{I}(H)$ sont des idéaux de Hopf gradués.

On dit qu'une dualité $\langle ., . \rangle$ entre deux algèbres de Hopf A et H est parfaite si elle est nondégénérée. Si elle ne l'est pas, en quotientant A et H par les idéaux d'annulation [8, 22] $\mathcal{I}(A)$ et $\mathcal{I}(H)$, on obtient une dualité parfaite $\overline{\langle ., . \rangle} \ : \ A/\mathcal{I}(A) \times H/\mathcal{I}(H) \to R$ entre $A/\mathcal{I}(A)$ et $H/\mathcal{I}(H)$.

2.5 Le double quantique

2.5.1 Construction

Théorème 8. *Soient* A *et* B *des* R*-algèbres de Hopf dont l'antipode est inversible, et* $< ., . > : A \otimes B \to R$ *une dualité de Hopf. Alors il existe une unique structure d'algèbre de Hopf* H *sur* $A \otimes B$*, notée* $\mathcal{D}(A, B^{\mathrm{op}})$*, telle que*

- *Comme cogèbre,* $H \simeq A \otimes B$.
- *Via les inclusions naturelles* $A \to H \ : \ a \mapsto a \otimes 1$ *et* $B \to H \ : \ b \mapsto 1 \otimes b$, A *et* B *sont des sous-algèbres de Hopf de* H^*.
- *Quels que soient* $a \in A$ *et* $b \in B$, $(a \otimes 1)(1 \otimes b) = a \otimes b$.
- *Quels que soient* $a \in A$ *et* $b \in B$,
$$(1 \otimes b)(a \otimes 1) = \sum_{(a),(b)} < S^{-1}(a'), b' >< a^{(3)}, b^{(3)} > a'' \otimes b''.$$

Le double quantique de Drinfel'd $\mathcal{D}(A)$ associé à une algèbre de Hopf A de dimension finie correspond au choix de $B = (A^*)^{\mathrm{cop}}$ et de la dualité naturelle entre A et A^*. Il s'écrit, en termes de produits bicroisés de bigèbres, $\mathcal{D}(A) = (A^{\mathrm{op}})^* \bowtie A$, avec la structure de A-module-cogèbre sur $(A^{\mathrm{op}})^*$ donnée par l'action coadjointe à gauche et la structure de $(A^{\mathrm{op}})^*$-module-cogèbre sur A donnée par[16]

$$a^{\lambda} = \sum_{(a)} \lambda \left(S^{-1}(a''') \, a' \right) a''.$$

[16]Cette action est en fait l'action coadjointe de $(A^{\mathrm{cop}})^*$ sur $\left(((A^{\mathrm{op}})^*)^{\mathrm{op}} \right)^* \simeq H$, via l'isomorphisme $S^* \ : \ (A^{\mathrm{cop}})^* \, (A^{\mathrm{op}})^*$.

Le double quantique possède une jolie interprétation en théorie des représentations, que nous développons dans le paragraphe suivant.

Théorème 9. *Soit H une R-algèbre de Hopf de dimension finie d'antipode inversible. Tout $\mathcal{D}(H)$-module à gauche a une structure naturelle de H-bimodule croisé et tout H-bimodule croisé a une structure de $\mathcal{D}(H)$-module à gauche.*

2.5.2 Bidules de Hopf et bimodules croisés

Définition 40. *Soit k un corps. Un bidule de Hopf sur une k-algèbre de Hopf H est un k-espace vectoriel M muni de structures de H-bimodule (μ_L et μ_R) et de H-bicomodule (δ_L et δ_R) telles que δ_L et δ_R soient des morphismes de H-bimodules (ce qui est équivalent au fait que μ_L et μ_R soient des morphismes de H-bicomodules).*

Définition 41. *Soit H une k-algèbre de Hopf. Un H-bimodule croisé (au sens de Yetter-Drinfel'd) est un k-espace vectoriel M muni d'applications linéaires $\mu_M : H \otimes M \to M$ et $\delta_M : M \to M \otimes H$ telles que*
- *Muni de μ_M, M est un H-module à gauche ;*
- *Muni de δ_M, M est un H-comodule à droite ;*
- *Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd}
H \otimes M \arrow[rr, "\Delta\otimes I_M"] \arrow[d, "\Delta\otimes\delta_M"'] & & H \otimes H \otimes M \arrow[d, "I_H\otimes\mu_M"] \\
H \otimes H \otimes M \otimes H \arrow[d, "I_H\otimes\tau_{H,M}\otimes I_H"'] & & H \otimes M \arrow[d, "\tau_{H,M}"] \\
H \otimes M \otimes H \otimes H \arrow[d, "\mu_M\otimes\mu"'] & & M \otimes H \arrow[d, "\delta_M\otimes I_H"] \\
M \otimes H & & M \otimes H \otimes H \arrow[ll, "I_M\otimes\mu"']
\end{tikzcd}$$

Si M est un bidule de Hopf, on considère les espaces coïnvariants à gauche $M^L = \{m \in M | \delta_L(m) = 1 \otimes m\}$ et à droite $M^R = \{m \in M | \delta_R(m) = m \otimes 1\}$. Un résultat de Sweedler (théorème de structure des bidules de Hopf) affirme que M est isomorphe, comme comodule à gauche et comme module à gauche, au module trivial $H \otimes M^L$, et à $M^R \otimes H$ comme comodule à droite. De plus, M^L est un sous-comodule à droite de M, et on lui confère une structure de H-module à droite en posant $mh = \sum_{(h)} S(h')mh''$ pour $m \in M^L,\ h \in H$. De même, M^R est un sous-comodule à gauche de M, et est un H-module à gauche pour l'action $hm = \sum_{(h)} h'mS(h'')$

si $m \in M^R,\ h \in H$.

Théorème 10. *Muni de ces structures, M^R est un H-bimodule croisé ; et si H et M sont de dimension finie, c'est un module sur le double quantique $\mathcal{D}(H)$. Et un morphisme de H-bidules de Hopf entre M et N induit un morphisme de H-bimodules croisés entre les espaces de coïnvariants M^R et N^R.*

La proposition suivante, due à Woronowicz, montre que la catégorie des H-bidules de Hopf est une catégorie tensorielle tressée.

Proposition 12. *Soient M et N des H-bidules de Hopf. Il existe un unique morphisme de H-bimodules $\sigma_{M,N} : M \otimes_H N \to N \otimes_H M$ tel que pour tous $m \in M^L$ et $n \in N^R$ $\sigma_{M,N}(m \otimes n) = n \otimes m$. De plus, $\sigma_{M,N}$ est un morphisme inversible de bicomodules et satisfait l'équation de tresses : si M, N, P sont des H-bidules de Hopf,*

$$(I_P \otimes \sigma_{M,N})(\sigma_{M,P} \otimes I_N)(I_M \otimes \sigma_{N,P}) = (\sigma_{N,P} \otimes I_M)(I_N \otimes \sigma_{M,P})(\sigma_{M,N} \otimes I_P).$$

On note $\mathfrak{B}_n$ le groupe de tresses, engendré par les générateurs σ_i, $1 \leq i \leq n-1$, et les relations

$$\sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j, \ 1 \leq i \neq j \leq n-1.$$

Puisque le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est défini par les mêmes générateurs standard, en adjoignant les relations $\sigma_i^2 = 1 \ \forall 1 \leq i \leq n-1$, on a un épimorphisme de groupes $\mathfrak{B}_n \to \mathfrak{S}_n$ et un relèvement standard qu'on notera

$$T : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{B}_n : w \mapsto T_w,$$

obtenu en envoyant σ_i sur le i^{e} générateur standard $\sigma_i = \begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{S}_n$ (le morphisme T est défini partout et de façon unique sur $\mathfrak{S}_n$ grâce à l'existence et à l'unicité de la décomposition d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ en transpositions élémentaires σ_i, $1 \leq i \leq n$).

Si V est un k-espace vectoriel, le choix d'un endomorphisme σ de $V \otimes V$ vérifiant l'équation de tresses permet de définir, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, une représentation de $\mathfrak{S}_n$ sur $V^{\otimes n}$, en envoyant σ_i sur $I_V^{i-1} \otimes \sigma_{V,V} \otimes I_V^{n-i-1}$.

On vérifie que $\sigma_{M,M}$ envoie $M^R \otimes M^R$ dans $M^R \otimes M^R$, et que la représentation du groupe de tresses $\mathfrak{B}_n$ dans $(M^R)^{\otimes n}$ qui s'en déduit est bien celle venant de la structure de H-bimodule croisé. Le foncteur $M \mapsto M^R$ est en fait une équivalence de catégorie entre la catégorie des H-bidules de Hopf et celle des H-bimodules croisés.

2.6 Superalgèbres de Hopf

On peut répéter les constructions qui précèdent pour des R-superalgèbres (supercogèbres, etc.) ; c'est-à-dire des R-algèbres $\mathbb{Z}_2$-graduées[17]. Il faut alors modifier la définition du « flip » : si $M = M_{\bar{0}} \oplus M_{\bar{1}}$ et $M' = M'_{\bar{0}} \oplus M'_{\bar{1}}$ sont deux R-modules $\mathbb{Z}_2$-gradués, le « superflip » $\mathcal{T}_{M,M'}$ est défini par

$$\mathcal{T}_{M,M'} : M \otimes M' \to M' \otimes M : m \otimes m' \in M_\alpha \otimes M'_{\alpha'} \mapsto (-1)^{\alpha\alpha'} m' \otimes m.$$

[17]Ou plus généralement pour des algèbres graduées par un quotient de $\mathbb{Z}$, voir [42].

La définition de la structure de superalgèbre sur un produit tensoriel de deux superalgèbres $B = (B, \mu_B, \eta_B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ et $C = (C, \mu_C, \eta_C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ s'en trouve donc modifiée : puisque $\mu_{B\otimes C} = (\mu_B \otimes \mu_C) \circ (I_B \otimes \mathcal{T}_{B,C} \otimes I_C)$, on trouve, pour $b \otimes c$ et $b' \otimes c' \in B \otimes C$ homogènes,

$$(b \otimes c)\,(b' \otimes c') = (-1)^{\delta b' \delta c} bb' \otimes cc'.$$

La définition (de la structure de cogèbre) du produit tensoriel de deux cogèbres subit un changement analogue. Les conditions définissant une cogèbre ne changent pas, sauf en ce qui concerne la compatibilité entre le produit et le coproduit, qui s'écrit maintenant, pour $b, c \in B$,

$$\sum_{(bc)} (bc)' \otimes (bc)'' = \sum_{(b),(c)} (-1)^{\delta b'' \delta c'} b'c' \otimes b''c''.$$

2.7 R-matrices et bigèbres tressées

Définition 42. *Soient k un corps et V un k-espace vectoriel. Une R-matrice [8, 22] est un élément $c \in \mathrm{Aut}\,(V \otimes V)$ satisfaisant l'équation de Yang-Baxter*

$$(c \otimes I_V) \circ (I_V \otimes c) \circ (c \otimes I_V) = (I_V \otimes c) \circ (c \otimes I_V) \circ (I_V \otimes c)\,.$$

Le « flip » $\tau_{V,V}\,(v \otimes w) = w \otimes v$ vérifie toujours l'équation de Yang-Baxter, grâce à la relation de Coxeter sur les transpositions

$$(1\ 2)\,(2\ 3)\,(1\ 2) = (2\ 3)\,(1\ 2)\,(2\ 3)\,.$$

Si c est une R-matrice, αc avec $\alpha \in k$ et $\tau_{V,V} \circ c \circ \tau_{V,V}$ en sont aussi. Comme plus haut (section 2.5), une R-matrice c de V définit, pour chaque $n \geq 3$, une unique représentation $\rho_n \;:\; \mathcal{B}_n \to \mathrm{Aut}\,(V^{\otimes n}) \;:\; T_{\sigma_k} \mapsto I^{k-1} \otimes c_{V,V} \otimes I^{n-k-1}$ du groupe de tresses $\mathcal{B}_n$.

Définition 43. *Soit $(B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une k-bigèbre. B sera dite quasi-cocommutative s'il existe un élément inversible $\mathscr{R} \in (B \otimes B)^{\times}$ tel que $\forall b \in B$*

$$(\tau_{B,B} \circ \Delta)\,(x) = \mathscr{R}\Delta\,(x)\,\mathscr{R}^{-1}.$$

On dit alors que $\mathscr{R}$ est une R-matrice universelle.

Définition 44. *Une bigèbre (resp. algèbre de Hopf) quasi-cocommutative $(B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \mathscr{R})$ (resp. d'antipode S) est dite tressée — ou quasi-triangulaire — si la R-matrice satisfait*

$$\begin{cases} (\Delta \otimes I_B)\,(\mathscr{R}) &= \mathscr{R}_{13}\mathscr{R}_{23} \\ (I_B \otimes \Delta)\,(\mathscr{R}) &= \mathscr{R}_{13}\mathscr{R}_{12}. \end{cases}$$

Dans la définition, si $\mathscr{R} = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ avec $x_i, y_i \in B$, $1 \leq i \leq n$, on a noté $\mathscr{R}_{12} = \mathscr{R}$, $\mathscr{R}_{13} = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes 1 \otimes y_i$ et $\mathscr{R}_{23} = \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes x_i \otimes y_i$. Les conditions s'expriment alors

$$\begin{cases} \sum_{1\leq i\leq n} \sum_{(x_i)} (x_i)' \otimes (x_i)'' \otimes y_i &= \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i \otimes x_j \otimes y_i y_j \\ \sum_{1\leq i\leq n} \sum_{(y_i)} x_i \otimes (y_i)' \otimes (y_i)'' &= \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i x_j \otimes y_i \otimes y_j. \end{cases}$$

Lorsqu'on a une bigèbre tressée, la R-matrice universelle $\mathscr{R}$ satisfait notamment les relations

$$\mathscr{R}_{12}\mathscr{R}_{13}\mathscr{R}_{23} = \mathscr{R}_{23}\mathscr{R}_{13}\mathscr{R}_{12}$$
$$(\varepsilon \otimes I_B)(\mathscr{R}) = 1 = (I_B \otimes \varepsilon)(\mathscr{R}).$$

En outre, si $B = H$ est une algèbre de Hopf d'antipode S, on a les relations

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (S \otimes I_H)(\mathscr{R}) & = & \mathscr{R}^{-1} & = & (I_H \otimes S^{-1})(\mathscr{R}) \\ (S \otimes S)(\mathscr{R}) & = & \mathscr{R}. & & \end{array} \right.$$

Si $(B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \mathscr{R})$ est une bigèbre tressée, et si M et N sont des B-modules, on peut construire une généralisation du « flip » $\tau_{M,N}$ (qui s'y ramène si $\mathscr{R} = 1 \otimes 1$) : pour $m \in M$ et $n \in N$,

$$c^R_{M,N}(m \otimes n) = \tau_{M,N}(\mathscr{R}(m \otimes n)).$$

C'est un isomorphisme, d'inverse

$$\left(c^R_{M,N}\right)^{-1}(n \otimes m) = \mathscr{R}^{-1}(n \otimes m).$$

Si $\mathscr{R} = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, cela s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ccc} c^R_{M,N}(m \otimes n) & = & \sum_{i=1}^n y_i n \otimes x_i m \\ \left(c^R_{M,N}\right)^{-1}(n \otimes m) & = & \sum_{i=1}^n S(x_i)\, m \otimes y_i n. \end{array} \right.$$

Cet isomorphisme satisfait l'équation de tresses suivante, où M, N, P sont trois B-modules,

$$\left(c^R_{N,P} \otimes I_M\right) \circ \left(I_N \otimes c^R_{M,P}\right) \circ \left(c^R_{M,N} \otimes I_P\right) = \left(I_P \otimes c^R_{M,N}\right) \circ \left(c^R_{M,P} \otimes I_N\right) \circ \left(I_M \otimes c^R_{N,P}\right).$$

En particulier, si $M = N = P = V$, on obtient une solution de l'équation de Yang-Baxter sur V, c'est-à-dire une R-matrice sur V.

Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie. Soient $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base de H et $\left(e^k\right)_{1 \leq k \leq n}$ la base duale de H^*. Alors le double quantique $\mathcal{D}(H)$ est une algèbre de Hopf tressée, avec $\mathscr{R} = \sum_{k=1}^n (1 \otimes e_k) \otimes \left(e^k \otimes 1\right) \in \mathcal{D}(H) \otimes \mathcal{D}(H)$. Dans ce cas, on a

$$\mathscr{R}^{-1} = \sum_{i=1}^n (S(e_i) \otimes 1) \otimes \left(1 \otimes e^i\right).$$

3 Algèbres enveloppantes et représentations

3.1 Algèbres et superalgèbres enveloppantes

3.1.1 Définitions

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps k. L'algèbre enveloppante [10, 6] $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est le quotient de l'algèbre tensorielle $T\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{g}^{\otimes n}$ par l'idéal engendré par les éléments $a\otimes b - b\otimes a - [a,b]$, $a, b \in \mathfrak{g}$. On note $\iota_{\mathfrak{g}}$ le morphisme composé de l'inclusion $\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et de la surjection canonique $p \ : \ T\mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. C'est un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans Lie$(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$, c'est-à-dire que $\iota([x,y]) = \iota(x)\iota(y) - \iota(y)\iota(x)$, pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$. L'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ vérifie la propriété universelle suivante : pour toute algèbre associative A et tout morphisme d'algèbre de Lie $f \ : \ \mathfrak{g} \to \mathrm{Lie}(A)$, il existe un unique morphisme d'algèbres $\bar{f} \ : \ (\mathfrak{g}) \to A$ tel que $f = \bar{f}\circ\iota$. Vu la définition de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, cette dernière algèbre est naturellement filtrée : $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\mathcal{U}(\mathfrak{g}))_i$, où $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))_i = p\left(\bigoplus_{j=0}^{i} \mathfrak{g}^{\otimes j}\right)$.

On note habituellement $x_1x_2\ldots x_N$ l'élément $p(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_N)$, avec $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathfrak{g}$. La propriété universelle entraîne en particulier qu'à toute représentation de $\mathfrak{g}$, $\rho \ : \ \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ est associée une unique représentation de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. En d'autres termes la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules est équivalente à la catégorie des $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-modules. De plus, l'application $\mathfrak{g} \mapsto \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est un foncteur de la catégorie des algèbres de Lie dans celle des algèbres associatives, c'est-à-dire en particulier qu'à un morphisme d'algèbres de Lie $f \ : \ \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ correspond un morphisme d'algèbres $\mathcal{U}(f) \ : \ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ tel que

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \iota_{\mathfrak{g}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{\mathfrak{h}}} \\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow[\mathcal{U}(f)]{} & \mathcal{U}(\mathfrak{h}). \end{array}$$

Le théorème fondamental est le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt :

Théorème 11. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une base totalement ordonnée de $\mathfrak{g}$. Alors 1 et les éléments de la forme $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_N}$, où $N \in \mathbb{N}_0$ et $i_1 < i_2 < \ldots < i_N$, constituent une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.*

Si $S(\mathfrak{g})$ désigne l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, ce théorème exprime simplement le fait que $\mathrm{gr}\,(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \simeq S(\mathfrak{g})$ en tant que k-espaces vectoriels gradués.

Notons que, si $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$. En outre, si $\mathbb{K}$ est une extension (de corps) de k, on a la relation simple $\mathcal{U}(\mathbb{K}\otimes_k \mathfrak{g}) \simeq \mathbb{K}\otimes_k \mathcal{U}(\mathcal{G})$ (et $\iota_{\mathbb{K}\otimes_k\mathfrak{g}} = I_{\mathbb{K}} \otimes_k \iota_{\mathfrak{g}}$).

Structure d'Algèbre de Hopf

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ possède une structure d'algèbre de Hopf. Le coproduit $\Delta \ : \ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ se déduit du morphisme diagonal $\boldsymbol{\Delta} \ : \ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ (pour $x \in \mathfrak{g}$, $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$). Notons que ce coproduit vérifie, pour tous $g, h \in \mathfrak{g}$,

$$\Delta\left([g,h]_{\mathfrak{g}}\right) = [\Delta(x), \Delta(y)]_{\mathrm{Lie}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))}.$$

La coünité est déterminée par $\varepsilon(x) = 0\,\forall x \in \mathfrak{g}$, $\varepsilon(1) = 1$ (c'est-à-dire $\varepsilon \circ \iota = 0$), et l'antipode par $S(x) = -x$, $\forall x \in \mathfrak{g}$ et $S(1) = 1$. Si on prend les éléments primitifs de l'algèbre enveloppante, on retrouve l'algèbre de Lie[18].

Les résultats suivants témoignent du fait que la classe des algèbres de Hopf ainsi obtenues est assez large.

Proposition 13. *Soit H une bigèbre sur un corps k de caractéristique nulle.*

- *Si de plus H est un groupe formel, c'est-à-dire si $H^* \simeq k \ll \mathfrak{g}_1, \ldots, X_N \gg$, alors l'injection naturelle $\iota : \mathcal{P}(H) \to H$ induit un isomorphisme de bigèbres $H \simeq \mathcal{U}(\mathcal{P}(H))$ [33].*
- *Si H est graduée, connexe, engendrée par ses éléments primitifs, et possède une antipode, alors ι induit un isomorphisme d'algèbres de Hopf [16]*

$$H \simeq \mathcal{U}(\mathcal{P}(H)).$$

- *Si H est irréductible (en tant que cogèbre), cocommutative et possède une antipode, alors $H \simeq \mathcal{U}(\mathcal{P}(H))$. [33]*

3.1.2 Le cas des superalgèbres de Lie

La notion d'algèbre enveloppante universelle possède un analogue strict pour les superalgèbres de Lie. Si $\mathcal{G}$ est une superalgèbre de Lie, son algèbre enveloppante universelle est $\mathcal{U}(\mathcal{G}) = T\mathcal{G}/I$, où I est l'idéal bilatère engendré par les éléments $a \otimes b - (-1)^{\delta a \delta b} b \otimes a - [a, b]$, où a et b sont des éléments homogènes de $\mathcal{G}$. On note $\iota : \mathcal{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{G})$ le morphisme composé de l'inclusion $\mathcal{G} \to T\mathcal{G}$ et de la surjection canonique $p : T\mathcal{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{G})$. C'est un morphisme de superalgèbres de Lie : $\iota([x, y]) = \iota(x)\iota(y) - (-1)^{\delta x \delta y}\iota(y)\iota(x)$ L'algèbre enveloppante universelle vérifie la propriété universelle suivante : pour toute superalgèbre associative A et tout morphisme de superalgèbres de Lie $f : \mathcal{G} \to \mathrm{SLie}(A)$, il existe un unique morphisme de superalgèbres $\bar{f} : \mathcal{U}(\mathcal{G}) \to A$ tel que $f = \bar{f} \circ \iota$. Comme dans le cas des algèbres de Lie, l'algèbre enveloppante est naturellement filtrée : $\mathcal{U}(\mathcal{G}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{U}(\mathcal{G}))_i$, où $(\mathcal{U}(\mathcal{G}))_i = p\left(\bigoplus_{\ell=0}^{i} \mathcal{G}^{\otimes j}\right)$.

Dans ce cadre, le morphisme diagonal est induit par le morphisme de superalgèbres de Lie

$$\mathcal{G} \to \mathrm{SLie}(\mathcal{U}(\mathcal{G}) \times \mathcal{U}(\mathcal{G})) \;:\; a \mapsto \iota(a) \otimes 1 + 1 \otimes \iota(a).$$

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt s'adapte au cas supersymétrique.

Théorème 12. *Soit $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \bigoplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$ une superalgèbre de Lie. Si $(a_1, \ldots, a_p)$ est une base de $\mathcal{G}_{\bar{0}}$, si $(b_1, \ldots, b_q)$ est une base de $\mathcal{G}_{\bar{1}}$, alors les éléments de la forme*

$$a_1^{k_1} \ldots a_p^{k_p} b_{i_1} \ldots b_{i_s},$$

où $k_i \geq 0$ et $1 < i_1 < \ldots < i_s \leq q$, forment, avec 1, une base de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

[18]En général (*id est* sur un anneau), on a $\mathfrak{g} \subset \mathcal{P}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$, avec l'égalité si $\iota : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est injectif.

Si V est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, on définit son algèbre supersymétrique $\mathcal{S}(\mathcal{V})$ comme le quotient de $T(V)$ par l'idéal engendré par les éléments $a \otimes b - (-1)^{\delta a \delta b} b \otimes a$, où a et b sont des éléments homogènes de V. On voit alors facilement que

$$\mathcal{S}(V) = S(V_{\bar{0}}) \otimes \Lambda(V_{\bar{1}}),$$

que

$$\mathcal{S}(V)_{\bar{0}} = S(V_{\bar{0}}) \otimes \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \Lambda^{2j}(V_{\bar{1}})$$

et que

$$\mathcal{S}(V)_{\bar{1}} = S(V_{\bar{0}}) \otimes \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \Lambda^{2j+1}(V_{\bar{1}}).$$

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt affirme en fait que $\mathrm{gr}(\mathcal{U}(\mathcal{G})) \simeq \mathcal{S}(\mathcal{G})$ en tant que k-espaces vectoriels gradués.

La propriété universelle de la superalgèbre enveloppante entraîne aussitôt que, comme dans le cas des algèbres de Lie, tout module sur une superalgèbre de Lie $\mathcal{G}$ est un module à gauche sur la superalgèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, et vice-versa : on a une équivalence de catégories entre les $\mathcal{G}$-modules et les $\mathcal{U}(\mathcal{G})$-modules.

Comme dans le cas « classique », on a les propriétés

$$\mathcal{U}(\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2) \simeq \mathcal{U}(\mathcal{G}_1) \otimes \mathcal{U}(\mathcal{G}_2)$$ [19]

et

$$\mathcal{U}(\mathbb{K} \otimes_k \mathfrak{g}) \simeq \mathbb{K} \otimes_k \mathcal{U}(\mathcal{G}).$$

Structure de superalgèbre de Hopf

Si $\mathcal{G}$ est une superalgèbre de Lie, son algèbre enveloppante hérite d'une structure de superalgèbre de Hopf. La définition des opérations est strictement la même (hormis la spécificité de la définition du produit tensoriel de deux superalgèbres) ; elles sont automatiquement $\mathbb{Z}_2$-graduées.

Comme dans le cas des algèbres de Lie, le coproduit $\Delta_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}$ vérifie, pour tous $g, h \in \mathcal{G}$,

$$\Delta_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}([g,h]_{\mathcal{G}}) = [\Delta_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}(g), \Delta_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}(h)]_{\mathrm{SLie}(\mathcal{U}(\mathcal{G}))}.$$

3.2 Représentations des algèbres de Lie et des superalgèbres de Lie

3.2.1 Représentations des algèbres de Lie

Le groupe de Weyl W permute les poids d'une représentation [5, 7, 17, 32]. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple, W permute transitivement les racines de $\mathfrak{g}$. On définit les poids fondamentaux $\bar{\omega}_i$, $1 \leq i \leq n$, par les équations $\frac{2(\bar{\omega}_i|\alpha_k)}{(\alpha_k|\alpha_k)} = \delta_{i,k}$. Un poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est dit dominant si $\lambda = \sum_{i=1}^{n} c_i \bar{\omega}_i$ avec $c_i \geq 0$ $\forall 1 \leq i \leq n$.

[19] Où le symbole $\otimes$ désigne ici, rappelons-le, le produit tensoriel entre algèbres $\mathbb{Z}_2$-graduées.

Comme dans le cas des algèbres « standard », si V est un $\mathfrak{g}$-module et V' un $\mathfrak{g}'$-module, le produit tensoriel $V \otimes V'$ hérite d'une structure de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$-module. Cependant, dans le cas des algèbres de Lie, si $\rho_1 \ : \ \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V_1)$ et $\rho_2 \ : \ \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V_2)$ sont deux représentations d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ possède une structure de $\mathfrak{g}$-module[20], via

$$\rho_{1\otimes 2} \ : \ \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2) \ : \ g \mapsto \rho_1(g) \otimes I_{V_2} + I_{V_1} \otimes \rho_2(g).$$

Si V est un $\mathfrak{g}$-module et V' un $\mathfrak{g}'$-module, le k-espace vectoriel $\mathrm{Hom}\,(V, V')$ possède une structure de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$-module : pour $g \in \mathfrak{g}$, $g' \in \mathfrak{g}'$, $A \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$,

$$(g, g')\,(A) = g'_{V'} \circ A - A \circ g_V.$$

Cette structure se déduit de la structure de $\mathcal{U}\,(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}\,(\mathfrak{g}')$-module $(X \otimes X')A = X'_{V'} \circ g \circ X_V$, pour $X \in \mathcal{U}\,(\mathfrak{g})$, $X' \in \mathcal{U}\,(\mathfrak{g}')$, $A \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$.

Le dual V^* d'un $\mathfrak{g}$-module V possède une structure de $\mathfrak{g}$-module, appelée module contragrédient, définie, si $\lambda \in V^*$ et $g \in \mathfrak{g}$, par

$$g\lambda = -\lambda \circ g_V.$$

En effet, si un V est un $\mathcal{U}\,(\mathfrak{g})$-module pour la représentation $\rho \ : \ \mathcal{U}\,(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}\, V$, la représentation duale ρ^* est donnée par, si $X \in \mathcal{U}\,(\mathfrak{g})$, $\rho^*\,(X) = {}^t\!\big(\rho\,(S\,(X))\big)$.

Étant donné la forme de Killing K, une base $(H_i)_{i\in I}$ de $\mathfrak{h}$, $(H'_i)_{i\in I}$ la base duale et $(X_\alpha)_{\alpha\in R}$ un système de Chevalley de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, l'élément de Casimir associé est

$$C = \sum_{\alpha\in R} \frac{X_\alpha X_{-\alpha}}{K(X_\alpha, X_{-\alpha})} + \sum_{i\in I} H_i H'_i.$$

3.2.2 Représentations des superalgèbres de Lie

Soit $\mathcal{H}$ un idéal gradué de $\mathcal{G}$. On choisit une base $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ de $\mathcal{H}$ composée d'éléments homogènes e_i de degrés respectifs ε_i, une forme bilinéaire non dégénérée b sur $\mathcal{H}$ homogène de degré β. Soit $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ la base duale de $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ par rapport à b. Si h est une forme n-linéaire $\mathcal{G}$-invariante homogène de degré ζ, on définit l'élément de Casimir généralisé[21]

$$C = \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_n\leq p} (-1)^{\beta\xi(i_1,\ldots,i_n)} h(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) f_{i_n} \ldots f_{i_1},$$

où $\xi\,(i_1, \ldots, i_n) = \sum_{s=1}^n s\varepsilon_{i_s}$. Cet élément de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est $\mathcal{G}$-invariant, homogène de degré $\zeta + n\beta$, et « supercommute » à tout élément de l'algèbre enveloppante

$$XY = (-1)^{(\zeta+n\beta)\eta} YX \text{ si } Y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})_\eta.$$

[20] C'est essentiellement dû au fait que le coproduit de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ conserve le crochet de Lie, voir la section 3.1.1.

[21] Pour cela et le reste, voir [19, 20, 13].

Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ deux superalgèbres de Lie. Si V est un $\mathcal{G}$-module et V' un $\mathcal{G}'$-module, le produit tensoriel $V \otimes V'$ hérite d'une structure de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}'$-module, définie comme suit

$$(g \otimes g')\,(v \otimes v') = gv \otimes v' + (-1)^{\nu\gamma'} v \otimes gv' \text{ si } g \in \mathcal{G},\ g' \in \mathcal{G}'_{\gamma'},\ v \in V_\nu,\ v' \in V'.$$

Via le morphisme diagonal, le produit tensoriel de deux $\mathcal{G}$-modules V et V' possède donc la structure de $\mathcal{G}$-module suivante, pour $g \in \mathcal{G}$ et $v, w \in V$ tous homogènes,

$$g(v \otimes w) = gv \otimes w + (-1)^{\delta g \delta v} v \otimes gw.$$

De plus, le « superflip » est un isomorphisme de $\mathcal{G}$-modules

$$\mathcal{T}_{V,V'}\ :\ V \otimes V' \to V' \otimes V\ :\ x \otimes y \in V_\alpha \otimes V'_\beta \mapsto (-1)^{\alpha\beta} y \otimes x.$$

Si V est un $\mathfrak{g}$-module, et V' un $\mathfrak{g}'$-module, on sait que le k-espace vectoriel $\mathrm{Hom}\,(V, V')$ possède une structure de $\mathcal{U}\,(\mathcal{G}) \otimes \mathcal{U}\,(\mathcal{G}')$-module, donnée par

$$(X \otimes X')A = (-1)^{\delta X(\delta X' + \delta A)} X'_{V'} \circ A \circ (\theta X)_V.$$

On en déduit une structure de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$-module : pour $g \in \mathfrak{g}$, $g' \in \mathfrak{g}'$, $A \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$,

$$(g, g')\,(A) = g'_{V'} \circ A - A \circ g_V.$$

Si V est un $\mathcal{G}$-module, on définit l'espace des invariants

$$V^L = \{x \in V | g_V(x) = 0\ \forall g \in \mathcal{G}\},$$

qui est un sous-module gradué de V.

Le dual V^* d'un $\mathfrak{g}$-module V possède une structure de $\mathfrak{g}$-module, et est appelé module contragrédient : si $\lambda \in V^*$ et $g \in \mathfrak{g}$,

$$g\lambda A = (-1)^{\delta A \delta g} g_V \circ A.$$

En particulier, on définit

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(V, W) = (\mathrm{Hom}(V, W))^{\mathcal{G}} = \{g \in Hom(V, W)_\gamma | X_W \circ g = (-1)^{\delta g \delta X} g \circ X_B\}.$$

Notons que $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(V, W))_{\bar{0}}$ est l'ensemble des morphismes de $\mathcal{G}$-modules entre V et W.

4 Algèbres enveloppantes quantifiées

4.1 Préalable : les q-analogues des coefficients binomiaux

Soit $q \in k^* \setminus \{1, -1\}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = q^{n-1} + q^{n-3} + \cdots + q^{-(n-1)}.$$

Alors $[-n]_q = -[n]_q$ et $[m+n]_q = q^{-n}[m]_q + q^m[n]_q$. De plus, si q n'est pas une racine de l'unité, $[n]_q = 0 \iff n = 0$; dans le cas contraire, si d est l'ordre de q et si

$$e = \begin{cases} d & \text{si } \; 2 \not| d \\ d/2 & \text{si } \; 2|d \end{cases}, \quad \text{alors} \quad [n]_q = 0 \iff n \cong 0 \mod e.$$

On définit ensuite les q-factorielles $[k]_q! = [1]_q[2]_q \dots [k]_q$ et les q-coefficients binomiaux

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} = \prod_{\ell=1}^{k} \frac{q^{n-\ell+1} - q^{-(n-\ell+1)}}{q^\ell - q^{-\ell}}.$$

Notons que $\begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}_q = (-1)^k$ et que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = 0$ si $0 \le n < k$. Les relations sur les coefficients binomiaux ont des q-analogues

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = (-1)^n \begin{bmatrix} k-n-1 \\ k \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{s=1}^{k} q^{m(k-s)-ns} \begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k-s \end{bmatrix}_q,$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{k(n-1)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = 0.$$

Notons aussi que, $\forall k, n \in \mathbb{Z}$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^{-1}} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ (puisque $[n]_{q^{-1}} = [n]_q$).

Une des motivations à l'introduction de ces q-analogues est que si x et y sont tels que $xy = q^2yx$, on a la formule binomiale quantique

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} q^{k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k}.$$

4.2 Définitions

4.2.1 L'algèbre enveloppante quantifiée d'une algèbre de Lie semi-simple

On appelle généralement une algèbre enveloppante quantifiée universelle d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ une algèbre topologique qui est une déformation formelle de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe définie par une matrice de Cartan $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$. On pose $b_{i,j} = (\alpha_i, \alpha_j)$; on suppose que les racines les plus courtes sont de longueur 2. On pose $q_i = q^{\frac{b_{i,i}}{2}}$ pour $1 \le i \le n$.

Définition 45. *[24, 14, 15, 34, 11] Soit $q \in \mathbb{C}$ qui n'est pas racine de l'unité. La $\mathbb{C}$-algèbre enveloppante quantifiée $U_q(\mathfrak{g})$ est définie par les générateurs E_i, F_i, K_i, K_i^{-1}, $1 \leq i \leq n$, et les relations*

$$K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1,\ K_iK_j = K_jK_i;$$

$$K_iE_jK_i^{-1} = q^{b_{i,j}}E_j,\ K_iF_jK_i^{-1} = q^{-b_{i,j}}F_j;$$

$$[E_i, F_j] = \delta_{i,j}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}};$$

$$\sum_{\nu=0}^{1-a_{i,j}} (-1)^\nu \begin{bmatrix} 1-a_{i,j} \\ \nu \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-a_{i,j}-\nu}E_jE_i^\nu = 0 \ \textit{si}\ i \neq j;$$

$$\sum_{\nu=0}^{1-a_{i,j}} (-1)^\nu \begin{bmatrix} 1-a_{i,j} \\ \nu \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-a_{i,j}-\nu}F_jF_i^\nu = 0 \ \textit{si}\ i \neq j.$$

La $\mathbb{C}$-algèbre $U_q(\mathfrak{g})$ possède une structure d'algèbre de Hopf $(U(\mathfrak{g}), \Delta, \varepsilon, S)$, avec

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i,\ \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i,\ \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i;$$

$$\varepsilon(E_i) = \varepsilon(F_i) = 0,\ \varepsilon(K_i) = 1;$$

$$S(E_i) = -K_i^{-1}E_i,\ S(F_i) = -F_iK_i,\ S(K_i) = K_i^{-1}.$$

Les deux dernières relations définissant la structure d'algèbre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ peuvent se réécrire

$$(\mathrm{ad}_q E_i)^{1-a_{i,j}}(E_j) = 0,\ (\mathrm{ad}_q F_i)^{1-a_{i,j}}F_j = 0,$$

où $(\mathrm{ad}_q x)(y) = [x, y]_q = xy - (-1)^{\delta x\ \delta y}qyx$ pour $x, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

On note $U_q^+(\mathfrak{g})$ (resp. $U_q^-(\mathfrak{g})$) la sous-algèbre de Hopf de $U_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les E_i (resp. F_i) et les K_i, $1 \leq i \leq n$. On note $U_q\mathfrak{n}_+$ (resp. $U_q\mathfrak{n}_-$) la sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les E_i (resp. F_i), $1 \leq i \leq n$, et on note T le groupe engendré par les K_i, K_i^{-1}, $1 \leq i \leq n$. On a la décomposition triangulaire

$$U_q(\mathfrak{g}) \simeq U_q\mathfrak{n}_- \otimes \mathbb{C}[T] \otimes U_q\mathfrak{n}_+.$$

On préfère parfois considérer la R-algèbre topologique $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$.

Définition 46. *Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ avec A une matrice de Cartan, la $\mathbb{C}[[h]]$-algèbre topologique $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ est engendrée par les générateurs E_i, F_i, H_i, $1 \leq i \leq n$, et les relations*

$$[H_i, H_j] = 0,\ [H_i, E_j] = a_{i,j}E_i,\ [H_i, F_j] = -a_{i,j}F_i;$$

$$[E_i, F_j] = \delta_{i,j}\frac{e^{-\frac{hb_{i,i}}{4}H_i} - e^{\frac{hb_{i,i}}{4}H_i}}{e^{-\frac{hb_{i,i}}{4}} - e^{\frac{hb_{i,i}}{4}}};$$

$$\sum_{\nu=0}^{1-a_{i,j}} (-1)^\nu \begin{bmatrix} 1-a_{i,j} \\ \nu \end{bmatrix}_{e^{-\frac{ha_{i,i}}{4}}} E_i^{1-a_{i,j}-\nu}E_jE_i^\nu = 0 \ \textit{si}\ i \neq j;$$

$$\sum_{\nu=0}^{1-a_{i,j}} (-1)^\nu \begin{bmatrix} 1-a_{i,j} \\ \nu \end{bmatrix}_{e^{-\frac{ha_{i,i}}{4}}} F_i^{1-a_{i,j}-\nu}F_jF_i^\nu = 0 \ \textit{si}\ i \neq j.$$

Cette R-algèbre topologique possède une structure d'algèbre de Hopf topologique $(\mathcal{U}_h(\mathfrak{g}), \Delta, \varepsilon, S)$, avec

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + e^{-\frac{ha_{i,i}}{4}H_i} \otimes E_i;$$

$$\Delta(F_i) = F_i \otimes e^{\frac{ha_{i,i}}{4}} + 1 \otimes F_i,\ \Delta(H_i) = H_i \otimes H_i;$$

$$\varepsilon(E_i) = \varepsilon(F_i) = 0,\ \varepsilon(H_i) = 1;$$

$$S(E_i) = -e^{\frac{ha_{i,i}}{4}H_i}E_i,\ S(F_i) = -e^{-\frac{ha_{i,i}}{4}H_i}F_i,\ S(H_i) = H_i.$$

On vérifie facilement que cette algèbre de Hopf topologique $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ est bien une déformation formelle de l'algèbre de Hopf $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. On définit comme plus haut les parties triangulaires $\mathcal{U}_q\mathfrak{b}_+, \mathcal{U}_q\mathfrak{b}_-, \mathcal{U}_q\mathfrak{n}_+, \mathcal{U}_q\mathfrak{n}_-$, et on a la décomposition triangulaire

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{U}_q\mathfrak{n}_- \otimes \mathbb{C}[T] \otimes \mathcal{U}_q\mathfrak{n}_+.$$

4.2.2 L'algèbre enveloppante quantifiée d'une algèbre de Lie affine

Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie affine définie par une matrice de Cartan $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$. On note $\mathring{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie semi-simple sous-jacente à $\mathfrak{g}$. Comme ci-dessus, on pose $b_{i,j} = (\alpha_i, \alpha_j)$; on suppose que les racines les plus courtes sont de longueur 2. On pose $q_i = q^{\frac{b_{i,i}}{2}}$ pour $1 \leq i \leq n$. L'algèbre enveloppante quantifiée $U_q(\mathfrak{g})$, pour $q \in k$ qui n'est pas racine de l'unité, est définie de la même manière que l'algèbre $U_q\left(\mathring{\mathfrak{g}}\right)$, en rajoutant les générateurs E_0, F_0, K_0, K_0^{-1}. Par construction donc, la sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} est isomorphe à $U_q\left(\mathring{\mathfrak{g}}\right)$.

On définit comme plus haut $U_q^+(\mathfrak{g})$, $U_q^-(\mathfrak{g})$, $U_q\mathfrak{n}_+$, $U_q\mathfrak{n}_-$ et T, et on a la décomposition triangulaire

$$U_q(\mathfrak{g}) \simeq U_q\mathfrak{n}_- \otimes \mathbb{C}[T] \otimes U_q\mathfrak{n}_+.$$

La définition de la R-algèbre de Hopf topologique $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ est en tout point analogue à la définition ci-dessus, et on vérifie facilement qu'elle contient cette algèbre de Hopf topologique $\mathcal{U}_h\left(\mathring{\mathfrak{g}}\right)$ comme sous-algèbre topologique, que $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ est bien une déformation formelle de l'algèbre de Hopf $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, et qu'on a toujours une décomposition triangulaire.

4.3 Propriétés et relation avec le double quantique

Grâce à la construction du double quantique, on peut reconstruire une algèbre enveloppante quantifiée $U_q(\mathfrak{g})$ à partir de sa partie triangulaire supérieure $U_q\mathfrak{b}_+$.

On vérifie facilement que l'antipode d'une algèbre de Hopf $U_q\mathfrak{b}_+$ est inversible : sur les générateurs, cela donne (0 ou $1 \leq i \leq n$)

$$\begin{aligned} S^{-1}(K_i) &= K_i^{-1}, \\ S^{-1}(K_i^{-1}) &= K_i, \\ S^{-1}(E_i) &= -E_iK_i. \end{aligned}$$

On définit une dualité de Hopf $\langle .,. \rangle$ entre $U_q\mathfrak{b}_+$ et $U_q\mathfrak{b}_-$ (qui lui est isomorphe)

$$\langle K_i, K_j \rangle = \langle K_i^{-1}, K_j^{-1} \rangle = \delta_{i,j},\ \langle E_i, F_j \rangle = \frac{\delta_{i,j}}{1-q^{-2}}.$$

On construit alors le double quantique correspondant $\mathcal{D}(U_q\mathfrak{b}_+, U_q\mathfrak{b}_-)$. En quotientant ce double quantique par une des versions de $\mathbb{C}[T]$, on retrouve l'algèbre enveloppante quantifiée $U_q(\mathfrak{g})$.

Cette construction est également réalisable pour la déformation formelle $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$.

Dans les cas semi-simple et affine, notamment via les opérateurs de Lusztig [24], on peut définir des vecteurs « de poids » et obtenir une base « à la Poincaré-Birkhoff-Witt » [11, 29]. En outre, puisque $U_q(\mathfrak{g})$ est en particulier un double quantique, il possède à ce titre une R-matrice universelle, dont on peut obtenir des expressions explicites [36, 35, 1, 29].

5 Algèbres de battage et groupes quantiques

On suit ici la référence [30].

5.1 Préliminaires

Si H est une k-bigèbre, M un H-bimodule, A une H-bimodule-algèbre, on définit le produit fg de deux morphismes de H-bimodules f et $g\ :\ M \to A$ comme l'unique application $fg\ :\ M \otimes_H M \to A$ envoyant $m \otimes m' \in M \otimes_H M$ sur $f(m)g(m')$.

Si $C = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C_i$ est une cogèbre graduée, un élément $x \in C$ sera dit « primitif » [22] si $\Delta(x) \in (C_0 \otimes C) \oplus (C \otimes C_0)$. Les éléments de C_0 et de C_1 sont automatiquement « primitifs ». La construction suivante est une généralisation de l'algèbre de battage classique.

Définition 47. *Soient M et N des H-bidules de Hopf. Leur coproduit cotensoriel est $M \sqcup N = \ker\left[\delta_R \times I_N - I_M \otimes \delta_L\ :\ M \otimes N \to M \otimes H \otimes N\right]$.*

La cogèbre cotensorielle de M est $T_H^c(M) = H \oplus \left(\bigoplus_{n \geq 1} M^{\sqcup n}\right)$.

La structure de cogèbre graduée sur $T_H^c(M)$ est donnée, sur $M^{\sqcup n}$, par $\Delta_n = \bigoplus_{p+q=n} \Delta_n^{p,q}$, où

$$\Delta_n^{p,q}\ :\ M^{\sqcup n} \to M^{\sqcup p} \otimes M^{\sqcup q}$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_p) \otimes (x_{p+1}, \ldots, x_n) \text{ si } p, q \geq 1$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\delta_L \otimes I_{M^{\otimes(n-1)}})(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(x_1)} x_1' \otimes (x_1'', x_2, \ldots, x_n) \text{ si } p = 0$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (I_{M^{\otimes(n-1)}} \otimes \delta_R)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(x_n)} (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n') \otimes x_n'' \text{ si } q = 0.$$

L'algèbre tensorielle $T_H(M)$ possède (par la propriété universelle) une unique structure de bigèbre telle que $\Delta_{T_H(M)}\big|_H = \Delta_H$ et $\Delta_{T_H(M)}\big|_M = \delta_L + \delta_R$.

Proposition 14. *Soient M un H-bimodule, A une H-bimodule-algèbre ; $f, g\ :\ M \to A$ deux morphismes de H-bimodules. Si $gf = (fg) \circ \sigma$, alors*

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} (f^k g^{n-k}) \circ \widetilde{\mathcal{B}}_{k,n-k},$$

où $\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n-k} = \sum_{w^{-1} \in \mathfrak{S}_{k,n-k}} T_w$.

On vérifie facilement que $\delta_L \delta_R = (\delta_R \delta_L) \circ \sigma$, et, en appliquant la dernière proposition à $T_H(M) \otimes T_H(M)$, $f = \delta_R$, $g = \delta_L$, on en déduit la forme du coproduit de $T_H(M)$, pour $(x_1, \ldots, x_n) \in M^{\otimes n}$,

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{n} (\delta_R^k \delta_L^{n-k}) \circ \widetilde{\mathcal{B}}_{k,n-k}.$$

[22] Rappelons qu'habituellement $x \in C$ est dit primitif si $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$; la notion utilisée ici est un peu plus large.

De manière analogue à la définition du coproduit sur l'algèbre tensorielle $T_H(M)$, le produit sur la cogèbre cotensorielle de M est l'unique morphisme de cogèbre $T_H^c(M) \otimes T_H^c(M) \to T_H^c(M)$ qui vaut μ_L sur $H \otimes M$ et μ_R sur $M \otimes H$.

Lorsque H et M sont de dimension finie, H^* est une algèbre de Hopf, M^* est un H-bidule de Hopf et le dual gradué de $T_H^c(M)$ est $T_{H^*}(M^*)$. Dans la suite, on notera $V = M^R$ l'espace des coïnvariants à droite.

Proposition 15.

– *Il existe une structure d'algèbre associative sur $T(V)$, qui est donnée par, si $v_1, \ldots, v_n \in V$,*

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p)(v_{p+1} \otimes \ldots \otimes v_n) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_{p,n-p}} T_w (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n).$$

– *La coaction diagonale de H sur chaque $V^{\otimes n}$ confère à $T(V)$ une structure de H-comodule $\delta_L : T(V) \to H \otimes T(V)$. La coaction δ_L est un morphisme d'algèbres.*

– *L'action diagonale de H sur chaque puissance tensorielle de V induit une structure de H-module-algèbre sur $T(V)$ et une structure de produit croisé d'algèbres sur $T(V) \otimes H$.*

– *On a une structure de cogèbre sur $T(V) \otimes H$, définie par, si $v_1, \ldots, v_n \in V$ et $h \in H$,*

$$\Delta((v_1, \ldots, v_n) \otimes h) =$$
$$\sum_{k=0}^{n} \left[(v_1, \ldots, v_k) \otimes v_{k+1}^{(-1)} \ldots v_n^{(-1)} h'\right] \otimes \left[(v_{k+1}^{(0)}, \ldots, v_n^{(0)}) \otimes h''\right].$$

– *Ces deux dernières structures sont compatibles et font de $T(V) \otimes H$ une k-algèbre de Hopf.*

On plonge maintenant $T(V)$ dans $T_H^c(M)$ via

$$\phi(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{(v_2), \ldots, (v_n)} v_1 v_2^{(-1)} \ldots v_n^{(-(n-1))} \otimes v_2^{(0)} v_3^{(-2)} \ldots v_n^{(-(n-2))} \otimes \ldots \otimes v_n^{(0)}.$$

L'image de ce plongement est l'espace des coïnvariants à droite de $T_H^c(M)$, on a donc un isomorphisme de H-module à droite et de H-comodule à droite

$$\hat{\phi} : T(V) \otimes H \to T_H^c(M)$$
$$\hat{\phi}((v_1, \ldots, v_n) \otimes h) =$$
$$\sum_{(v_2), \ldots, (v_n); (h)} v_1 v_2^{(-1)} v_3^{(-2)} \ldots v_n^{(-(n-1))} \otimes v_2^{(0)} v_3^{(-1)} \ldots v_n^{(-(n-2))} h^{(2)} \otimes \ldots \otimes v_n^{(0)} h^{(n)}.$$

Le produit étant un morphisme de comodules à droite, $(T_H^c(M))^R$ est une sous-algèbre de $T_H^c(M)$.

Théorème 13. *Le morphisme $\hat{\phi}$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf*

$$T_H^c(M) \simeq T(V) \otimes H.$$

La sous-algèbre de Hopf de $T_H^c(M)$ engendrée par H et M est notée $S_H(M)$. C'est un H-bidule de Hopf. Son espace de coïnvariants à droite est isomorphe (via ϕ^{-1}) à la sous-algèbre de $T(V)$ engendrée par V, qu'on note $S_\sigma(V)$ et qu'on appelle algèbre symétrique quantique. En tant qu'algèbre, $S_H(M)$ est le produit croisé de H par $S_\sigma(V)$.

5.2 Construction des objets

On considère $H = k[G]$ l'algèbre de groupe d'un groupe $G = \mathbb{Z}^N \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On fixe des générateurs $K_1, \ldots, K_N$ et θ de ce groupe. L'algèbre de Hopf $H = k[\mathbb{Z}^N] \oplus \theta k[\mathbb{Z}^N]$ est commutative et cocommutative, donc la structure d'un sous-espace de coïnvariants à droite V d'un bidule de Hopf est simplement celle d'un H-module à gauche, et d'un H-comodule à gauche, sans conditions de compatibilité. On choisit donc un k-espace vectoriel V de dimension N, dont la coaction à gauche δ reproduit le coproduit de H et dont l'action de H est complètement réductible. Il existe donc une base $(E_1, \ldots, E_N)$ de V, un ensemble (comprenant les indices dits impairs) $\tau \subset I = \{1, \ldots, N\}$ et des scalaires $(q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$, tels que la coaction s'écrive $\delta(E_i) = \theta^{\delta i} K_i \otimes E_i$ (où $\delta i = 1$ si $i \in \tau$ et $\delta i = 0$ si $i \notin \tau$) et tels que l'action s'écrive $K_i(E_j) = q_{i,j} E_j$, $\theta(E_i) = (-1)^{\delta i} E_i$.

On voit alors facilement que le tressage correspondant de V est donné par $\sigma(E_i \otimes E_j) = (-1)^{\delta i \delta j} q_{i,j} E_j \otimes E_i$. L'action adjointe de $S_H(M)$ est complètement décrite par, si $x \in S_H(M)$ et $i \in I$, $\mathrm{ad}(E_i)(x) = E_i x - \theta^{\delta i} K_i(x) E_i$; on en déduit que

$$\mathrm{ad}(E_i)(S_\sigma(V)) \subset S_\sigma(V).$$

Ce lemme est une généralisation d'un lemme démontré par M.Rosso.

Lemme 2. – *Si $i \in I$ et $r \in \mathbb{N}$,*

$$E_i^r = \prod_{k=1}^{r} \left(\frac{((-1)^{\delta i} q_{i,i})^k - 1}{(-1)^{\delta i} q_{i,i} - 1} \right) E_i^{\otimes r},$$

c'est-à-dire, si $i \notin \tau$ et $r \in \mathbb{N}$:

$$E_i^r = \prod_{k=1}^{r} \left(\frac{q_{i,i}^k - 1}{q_{i,i} - 1} \right) E_i^{\otimes r},$$

et si $i \in \tau$ et $r \in \mathbb{N}$,

$$E_i^r = \prod_{k=1}^{r} \left(\frac{1 + (-1)^{k-1} q_{i,i}^k}{1 + q_{i,i}} \right) E_i^{\otimes r}.$$

– *D'autre part, si $1 \leq i \neq j \leq N$ et $r \in \mathbb{N}$,*

$$\mathrm{ad}(E_i)^r(E_j) = \prod_{k=1}^{r} \left(\frac{q_{i,i}^k - 1}{q_{i,i} - 1} \right) \prod_{\ell=0}^{r-1} (1 - q_{i,i}^\ell q_{i,j} q_{j,i}) E_i^{\otimes r} \otimes E_j \text{ si } i \notin \tau;$$

$$\mathrm{ad}(E_i)^r(E_j) = \prod_{k=1}^{r} \left(\frac{(-q_{i,i})^k - 1}{(-q_{i,i}) - 1} \right) \prod_{\ell=0}^{r-1} (1 - (-q_{i,i})^\ell q_{i,j} q_{j,i}) E_i^{\otimes r} \otimes E_j \text{ si } i \in \tau.$$

Dans le cas (plus simple) où $G = \mathbb{Z}^N$ et où $q_{i,j} = q^{d_i a_{i,j}}$, avec $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ et $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_N \end{pmatrix}$ telle que DA est symétrique, pour q générique (non racine de l'unité), Rosso a prouvé que l'algèbre de Hopf $S_H(M)$ obtenue par cette construction était isomorphe à la sous-algèbre de Hopf triangulaire supérieure $\mathcal{U}_q\mathfrak{b}_+$ de l'algèbre enveloppante quantifiée de $\mathfrak{g}(A)$. Le lemme ci-dessus, dans ce cas simple ($\tau = \emptyset$), montre que les relations de Serre sont bien vérifiées : on a bien $\mathrm{ad}(E_i)^r(E_j) = 0$ si $r = 1 - a_{i,j}$.

Soit ici $\mathcal{G}$ une superalgèbre de Lie contragrédiente, c'est-à-dire se déduisant d'une matrice de Cartan supergénéralisée (A, τ). On suppose la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ symétrisable via la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_N \end{pmatrix}$. On applique alors la construction ci-dessus, en prenant pour coefficients de la représentation de départ $q_{i,j} = q^{d_i a_{i,j}}$, et bien entendu τ pour ensemble d'indices impairs. On obtient alors un objet $S_H(M)$ pouvant être considéré comme un analogue supersymétrique de $U_q\mathfrak{b}_+$. Notons que, outre les relations de Serre usuelles lorsque $i \notin \tau$, le lemme 2 affirme que, lorsque $i \in \tau$ avec $a_{i,i} = 2$, $\mathrm{ad}(E_i)^r(E_j) = 0$ si $r = 1 - a_{i,j}$ avec $a_{i,j}$ pair[23].

[23]Cette affirmation se retrouve, dans la construction de Yamane, dans le lemme 2.2.3. de la référence [37]. L'autre partie du lemme, à savoir que $[E_i, E_i] = 0$ si $i \in \tau$ et $a_{i,i} = 0$, se déduit également de notre lemme 2 de façon immédiate.

6 La construction de Hiroyuki Yamane

On suit ici la référence [38]. Ici, $R = \mathbb{C}[[h]]$.

6.1 Le passage des superalgèbres de Hopf aux algèbres de Hopf

Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{H}_{\bar{1}}$ une superalgèbre de Hopf. On note $p_i \ : \ \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$, $i \in \mathbb{Z}_2$ les projections canoniques. Soit $R{<}\theta{>} = R \oplus \theta R$ l'anneau du groupe $\mathbb{Z}_2$ sur $R = \mathbb{C}[[h]]$. On définit une structure de R-algèbre sur le R-module $\mathcal{H}^\theta = \mathcal{H} \otimes_R R{<}\theta{>}$, par

$$(x \otimes \theta^i)(y \otimes \theta^j) = x(p_{\bar{0}}(y) + (-1)^i p_{\bar{1}}(y)) \otimes \theta^{i+j}.$$

On abrège $x \otimes \theta^i$ en $x\theta^i$ et on définit

$$r_\theta \ : \ \mathcal{H} \to \mathcal{H}^\theta \ : \ x \mapsto x\theta \quad \text{et} \quad \ell_\theta \ : \ \mathcal{H} \to \mathcal{H}^\theta \ : \ x \mapsto \theta x.$$

Proposition 16. *Soit $\mathcal{H} = (\mathcal{H}, \dot{\Delta}, \dot{\varepsilon}, \dot{S})$ une R-superalgèbre de Hopf (topologique). Alors la R-algèbre $\mathcal{H}^\theta$ possède une structure de R-algèbre de Hopf (topologique) $(\mathcal{H}^\theta, \Delta, \varepsilon, S)$, où*

- *Le coproduit $\Delta \ : \ \mathcal{H}^\theta \to \mathcal{H}^\theta \otimes \mathcal{H}^\theta$ est défini par*

$$\Delta(x) = ((I_{\mathcal{H}^\theta} \otimes p_{\bar{0}} + p_{\bar{0}} \otimes p_{\bar{1}}) \circ \dot{\Delta})(x), \ \forall x \in \mathcal{H}, \ \textit{et}\ \Delta(\theta) = \theta \otimes \theta;$$

- *La coünité $\varepsilon \ : \ \mathcal{H}^\theta \to R$ est définie par $\varepsilon(x) = \dot{\varepsilon}(x)$ si $x \in \mathcal{H}$ et $\varepsilon(\theta) = 1$;*
- *L'antipode $S \ : \ \mathcal{H}^\theta \to \mathcal{H}^\theta$ est définie, pour $x \in \mathcal{H}$ et $S(\theta) = \theta$, par*

$$S(x) = ((p_{\bar{0}} + l_\theta \circ p_{\bar{1}}) \circ \dot{S})(x).$$

Proposition 17. *Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{H}_{\bar{1}}$ une R-superalgèbre (topologique). Si on a une structure de R-algèbre de Hopf $(\mathcal{H}^\theta, \Delta, \varepsilon, S)$ sur $\mathcal{H}^\theta = \mathcal{H} \otimes_R R{<}\theta{>}$ telle que*

- $\Delta(\mathcal{H}_{\bar{0}}) \subset \mathcal{H}_{\bar{0}} \otimes \mathcal{H}_{\bar{0}} + \mathcal{H}_{\bar{1}}\theta \otimes \mathcal{H}_{\bar{1}}$;
- $\Delta(\mathcal{H}_{\bar{1}}) \subset \mathcal{H}_{\bar{1}} \otimes \mathcal{H}_{\bar{0}} + \mathcal{H}_{\bar{0}}\theta \otimes \mathcal{H}_{\bar{1}}$;
- $\Delta(\theta) = \theta \otimes \theta$;
- $\varepsilon(\mathcal{H}_{\bar{0}}) = R, \ \varepsilon(\mathcal{H}_{\bar{1}}) = \{0\}, \ \varepsilon(\theta) = 1$;
- $S(\mathcal{H}_{\bar{0}}) \subset \mathcal{H}_{\bar{0}}, \ S(\mathcal{H}_{\bar{1}}) \subset \theta\mathcal{H}_{\bar{1}}, \ S(\theta) = \theta$;

alors il existe une unique structure de R-superalgèbre de Hopf (topologique) sur $\mathcal{H}$ induisant celle de $\mathcal{H}^\theta$ par la procédure précédente.

Cette construction est en fait un cas particulier de produit croisé de bigèbres : on a $\mathcal{H}^\theta \simeq \mathcal{H} \rtimes R{<}\theta{>}$, avec l'action suivante de $R{<}\theta{>}$ sur $\mathcal{H}$

$$\theta|_{\mathcal{H}_{\bar{0}}} = I_{\mathcal{H}_{\bar{0}}}, \ \theta|_{\mathcal{H}_{\bar{1}}} = -I_{\mathcal{H}_{\bar{1}}}.$$

6.2 Premières étapes

Les ingrédients de départ sont un $\mathbb{C}$-espace vectoriel complexe W de dimension N, une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $(.,.)\ :\ W\times W\to\mathbb{C}$, une partie de W linéairement indépendante $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\subset W$, une fonction parité p définie sur B (on notera comme d'habitude $\delta i=p(\alpha_i)$) et une matrice diagonale à coefficients demi-entiers non nuls $D=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix}$. À partir de ces données, Yamane définit un objet $\widetilde{\mathcal{U}}_h$, candidat pour être une « superalgèbre enveloppante quantifiée ».

On pose $\mathcal{H}=W^*$ et on définit $H_\nu\in\mathcal{H}$, pour $\nu\in W$, comme l'unique élément de $\mathcal{H}$ tel que $\lambda(H_\nu)=(\lambda,\nu)\ \forall\lambda\in W$. On notera aussi, si $1\leq i\leq n$, $H_i=H_{\alpha_i}$. Dans son article, Yamane commence par définir la R-algèbre topologique suivante.

Définition 48. *Soit $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$ la R-algèbre topologique définie par les générateurs E_i, F_i, $1\leq i\leq n$, θ et $H\in\mathcal{H}$, et par les relations, pour tous $H\in\mathcal{H}$ et $1\leq i\leq n$,*
- $\theta^2=1,\ \theta H=H\theta$;
- $\theta E_i\theta^{-1}=(-1)^{\delta i}E_i,\ \theta F_i\theta^{-1}=(-1)^{\delta i}F_i$;
- $[H,H']=0$;
- $[H,E_i]=\alpha_i(H)E_i,\ [H,F_i]=-\alpha_i(H)F_i$;
- $E_iF_j-(-1)^{\delta i\delta j}F_jE_i=\delta_{i,j}\frac{\sinh(hH_i)}{\sinh(hd_i)}$.

On notera respectivement $\widetilde{N}_+$, $S(\mathcal{H}^R)$, $R\text{<}\theta\text{>}\simeq R[\mathbb{Z}_2]$ et $\widetilde{N}_-$, les sous-algèbres de $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$ engendrées par $E_1,\dots,E_n$, par $H_1,\dots,H_n$, par θ et par $F_1,\dots,F_n$. Ces sous-algèbres sont respectivement isomorphes à $R\text{<}E_1,\dots,E_n\text{>}$, $R\theta\oplus R$, $R[\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\widetilde{H_i}]$ et $R\text{<}F_1,\dots,F_n\text{>}$, où $\left(\widetilde{H_i}\right)_{1\leq i\leq N}$ est une base de $\mathcal{H}$. On a alors la décomposition « triangulaire » de $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$.

Proposition 18. *On a un isomorphisme de R-modules topologiques*

$$\begin{array}{rcl}\mathscr{V}=\widetilde{N}_+\widehat{\otimes}S(\mathcal{H})\widehat{\otimes}R\text{<}\theta\text{>}\widehat{\otimes}\widetilde{N}_- & \to & \widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta \\ X\otimes Z\otimes\theta^c\otimes Y & \mapsto & X.Z.\theta^c.Y\end{array},$$

où $X\in\widetilde{N}_+$, $Z\in S[\mathcal{H}]$, $c\in\{0,1\}$, $Y\in\widetilde{N}_-$.

Démonstration
Si $(e_1,\dots,e_n)$, $(f_1,\dots,f_n)$, $(h_1,\dots,h_N)$, sont des bases de $\widetilde{N}_+$, $\widetilde{N}_-$, $\mathcal{H}$, la famille

$$\left(e_{i_1}\dots e_{i_s}\otimes h_1^{k_1}\dots h_N^{k_N}\otimes\theta^c\otimes f_{j_1}\dots f_{j_t}\right)_{\substack{1\leq i_1,\dots,i_s\leq n;\,k_1,\dots,k_n\in\mathbb{N}\\ c\in\{0,1\};\,1\leq j_1,\dots,j_t\leq n}}$$

est une base commode de $\mathscr{V}$. Les formules suivantes déterminent une structure de $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$-module sur $\mathscr{V}$

$$E_i\cdot\left(e_{i_1}\dots e_{i_s}\otimes h_1^{k_1}\dots h_N^{k_N}\otimes\theta^c\otimes f_{j_1}\dots f_{j_t}\right)=$$
$$e_ie_{i_1}\dots e_{i_s}\otimes h_1^{k_1}\dots h_N^{k_N}\otimes\theta^c\otimes f_{j_1}\dots f_{j_t},$$

$$F_i.\Big(e_{i_1}\dots e_{i_s}\otimes h_1^{k_1}\dots h_N^{k_N}\otimes\theta^c\otimes f_{j_1}\dots f_{j_t}\Big) =$$
$$\sum_{\ell=1}^{s}\delta_{i_\ell,i}(-1)^{\delta i(\delta i_1+\cdots+\delta i_{\ell-1})}e_{i_1}\dots e_{i_s}$$
$$\otimes\frac{\mathrm{sh}(h(H_i-(\alpha_{i_{\ell+1}}+\cdots+\alpha_{i_s})(H_i)))}{\mathrm{sh}(hd_i)}h_1^{k_1}\dots h_N^{k_N}\otimes\theta^c\otimes f_{j_1}\dots f_{j_n}$$
$$+(-1)^{\delta i(\delta i_1+\dots\delta i_s+c)}e_{i_1}\dots e_{i_s}\otimes(h_1+\alpha_i(h_1))^{k_1}\dots(h_N+\alpha_i(h_N))^{k_N}\otimes\theta^c\otimes f_if_{j_1}\dots f_{j_t},$$

$$H.\Big(e_{i_1}\dots e_{i_s}\otimes h_1^{k_1}\dots h_N^{k_N}\otimes\theta^c\otimes f_{j_1}\dots f_{j_t}\Big) =$$
$$e_{i_1}\dots e_{i_s}\otimes(H+(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_s})(H))\ h_1^{k_1}\dots h_N^{k_N}\otimes\theta^c\otimes y_{j_1}\dots y_{j_t},$$

$$\theta.\Big(e_{i_1}\dots e_{i_s}\otimes h_1^{k_1}\dots h_N^{k_N}\otimes\theta^c\otimes f_{j_1}\dots f_{j_t}\Big) =$$
$$(-1)^{\delta i_1\dots\delta i_s}e_{i_1}\dots e_{i_s}\otimes(H+(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_s})(H))\ h_1^{k_1}\dots h_N^{k_N}\otimes\theta^{c+1}\otimes y_{j_1}\dots y_{j_t}.$$

D'autre part, vu les relations définissant $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$, cette algèbre est engendrée (comme R-module topologique) par les éléments

$$\Big(E_{i_1}\dots E_{i_s}\otimes\widetilde{H_1}^{k_1}\dots\widetilde{H_N}^{k_N}\otimes\theta^c\otimes F_{j_1}\dots F_{j_t}\Big)_{1\le i_1,\dots,i_s\le n;1\le j_1,\dots,j_s\le n;s,k_1,\dots,k_N\in\mathbb{N},c\in\mathbb{Z}_2}$$

Le morphisme en question est donc un isomorphisme de $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$-modules.

□

La démonstration montre en outre que $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$ est un R-module topologiquement libre. On peut également munir $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$ d'une $\mathbb{Z}$-graduation, en donnant aux générateurs E_i, F_i ($1\le i\le n$), $H\in\mathcal{H}$, θ, les degrés respectifs 1, -1, 0, 0. On donne maintenant à $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$ une structure d'algèbre de Hopf graduée, de la manière suivante, pour $1\le i\le n$ et $H\in\mathcal{H}$,

$$\begin{array}{rcl}
\Delta(E_i) &=& E_i\otimes 1+e^{hH_i}.\theta^{\delta i}\otimes E_i,\\
\Delta(F_i) &=& F_i\otimes e^{-hH_i}+\theta^{\delta i}\otimes F_i,\\
\Delta(H) &=& H\otimes 1+1\otimes H,\\
\Delta(\theta) &=& \theta\otimes\theta,\\
S(E_i) &=& -e^{-hH_i}.\theta^{\delta i}E_i,\\
S(F_i) &=& -F_ie^{hH_i}.\theta^{\delta i},\\
S(\theta) &=& \theta,\\
S(H) &=& -H,\\
\varepsilon(E_i) &=& \varepsilon(F_i)=\varepsilon(H)=0,\\
\varepsilon(\theta) &=& 1.
\end{array}$$

6.3 Utilisation du double quantique

Pour des raisons de symétrie et de topologie, Yamane travaille par la suite sur le corps $R' = \mathbb{C}[[\sqrt{h}]] = R \oplus \sqrt{h}R$. On définit la R'-algèbre topologique $\sqrt{h}$-adique $\widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}_+^\theta$ par les générateurs E_i, $1 \leq i \leq n$, $H' \in \mathcal{H}$, θ, et les relations, pour $H', H'_1, H'_2 \in \mathcal{H}$,

$$\begin{array}{rclrcl} \theta^2 & = & 1, & \theta H' & = & H'\theta; \\ \theta E_i \theta^{-1} & = & (-1)^{\delta i} E_i, & [H'_1, H'_2] & = & 0; \\ [H', E_i] & = & \sqrt{h}\alpha_i(H')E_i. & & & \end{array}$$

On munit également cette algèbre d'une structure d'algèbre de Hopf, le coproduit, l'antipode et la coünité étant définis sur les générateurs E_i, $1 \leq i \leq n$, $H' \in \mathcal{H}^{R'}$ et θ de la même manière que sur $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$, en remplaçant h par $\sqrt{h}$. On a également une décomposition triangulaire

$$\widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}_+^\theta \simeq \widetilde{N}'_+ \otimes S(\mathcal{H}^{R'}) \otimes R'{<}\theta{>}.$$

On a de même une $\mathbb{N}$-graduation sur $\widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}_+^\theta$, définie en donnant des degrés aux générateurs : 1 pour les E_i, $1 \leq i \leq n$, et 0 pour $H' \in \mathcal{H}^{R'}$ et θ. Si $(H'_1, \ldots, H'_N)$ est une base de $\mathcal{H}$, on a une base topologique de $\widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}_+^\theta$

$$(E_{i_1} \ldots E_{i_s}.H_1'^{k_1} \ldots H_N'^{k_N}.\theta^c)_{1 \leq i_1, \ldots, i_s \leq n;\ k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{N}; c \in \mathbb{Z}_2}.$$

Pour $a \in \mathbb{N}$, on définit S'_a comme étant le sous-module des éléments homogènes de degré a de $S(\mathcal{H}^{R'})$. En outre, pour $\lambda \in P_+ = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{N}\alpha_i$, on note

$$\widetilde{N}'_{+,\lambda} = \bigoplus_{\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s} = \lambda} R' E_{i_1} \ldots E_{i_s}.$$

Alors $S(\mathcal{H}^{R'}) = \bigoplus_{a \in \mathbb{N}} S'_a$ et $\widetilde{N}'_+ = \bigoplus_{\lambda \in P_+} \widetilde{N}'_+$.

En vue d'exhiber un homomorphisme entre $\widetilde{\mathcal{U}}_{\sqrt{h}}\mathcal{B}_+^\theta$ et son dual restreint, on choisit des éléments particuliers, a priori dans $\left(\widetilde{\mathcal{U}}_{\sqrt{h}}\mathcal{B}_+^\theta\right)^*$. On va les définir sur des générateurs de la forme $X.Z'.\theta^c$, où $X \in \widetilde{N}'_{+,\mu} \setminus \{0\}$, $Z' \in S'_a \setminus \{0\}$ et $c \in \{0, 1\}$.

$$\begin{array}{rcl} H'^\circ_\lambda(X.Z'.\theta^c) & = & \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda(Z') & \text{si} & X = 1 \quad \text{et} \quad a = 1 \\ 0 & \text{si} & \mu \neq 0 \quad \text{ou} \quad a \neq 1 \end{array} \right. \\ E_i^\circ(X.Z'.\theta^c) & = & \left\{ \begin{array}{lcl} 1 & \text{si} & X = E_i \quad \text{et} \quad Z' = 1 \\ 0 & \text{si} & \mu \neq \alpha_i \quad \text{ou} \quad a \neq 0 \end{array} \right. \\ \theta^\circ(X.Z'.\theta^c) & = & \left\{ \begin{array}{ccc} (-1)^c & \text{si} & X = Z' = 1 \\ 0 & \text{si} & \mu \neq 0 \text{ ou } a \neq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

En évaluant E_i°, H'°_λ, θ°, sur les éléments de base de $\widetilde{U}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}_+^\theta$, on voit que $\mathrm{rang}(\widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}_+^\theta.E_i^\circ)$, $\mathrm{rang}(\widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}_+^\theta.H_\lambda^\circ)$, $\mathrm{rang}(\widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}_+^\theta.\theta^\circ)$, sont tous trois finis, c'est-à-dire que E_i $(1 \leq i \leq n)$, H_λ° $(\lambda \in P_+)$ et θ° sont dans le dual restreint $\left(\widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}_+^\theta\right)^\circ$ de $\widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}_+^\theta$.

Le morphisme d'algèbres de Hopf cherché est alors

$$\Theta \;:\; \widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+ \to \overline{\left(\widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+\right)^\circ} \;:\; \left\{ \begin{array}{ccc} H'_\lambda & \mapsto & H'^\circ_\lambda \\ E_i & \mapsto & E^\theta_i \\ \theta & \mapsto & \theta^\circ \end{array} \right. .$$

On voit qu'en outre Θ est gradué. Ce morphisme permet donc de définir une dualité graduée d'algèbres de Hopf topologiques $\langle .,. \rangle \;:\; \widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+ \times \widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+ \to R'$, en posant, si $x, y \in \widetilde{U}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+$, $\langle x, y\rangle = \Theta(x)(y)$. Le lemme suivant donne une expression explicite de cette dualité.

Lemme 3. *Soit* $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ *une* $\mathbb{C}$*-base de* W *telle que* $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{i,j}$*. Alors, si* $X \in \widetilde{N}'_{+,\lambda}$ *et* $Y \in \widetilde{N}'_{+,\mu}$*,*

$$\langle X.H'^{a_1}_{\varepsilon_1} \dots H^{a_N}_{\varepsilon_N}.\theta^c, Y.H'^{b_1}_{\varepsilon_1} \dots H'^{b_N}_{\varepsilon_N}.\theta^d\rangle = (-1)^{cd}.\left(\prod_{i=1}^N (\delta a_i, b_i.a_i!)\right).\delta_{\lambda,\mu}\langle X, Y\rangle.$$

Soient maintenant $I'_{\mathcal{B}_+} \subset \widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+$ et $I'_+ \subset \widetilde{N}'_+$ les noyaux des formes $\langle .,. \rangle$ et $\langle .,. \rangle|_{\widetilde{N}'_+\times\widetilde{N}'_+}$ respectivement. En utilisant les propriétés de $\langle .,. \rangle$, on prouve très facilement que $I'_{\mathcal{B}_+} = I'_+.S\left(\mathcal{H}^{R'}\right).R'{<}\theta{>}$. La dualité $\langle .,. \rangle$ étant une dualité de Hopf graduée, l'idéal $I'_{\mathcal{B}_+}$ est un idéal de Hopf gradué. Si on définit les algèbres $\mathcal{U}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+ = \widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+/I'_{\mathcal{B}_+}$ et $N'_+ = \widetilde{N}'_+/I'_+$, l'algèbre $\mathcal{U}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+$ hérite d'une structure d'algèbre de Hopf $\mathbb{N}$-graduée. Remarquons que maintenant la dualité-quotient $\langle .,. \rangle$ est une dualité parfaite entre $\mathcal{U}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+$ et elle-même. Notons $\psi \;:\; \widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+ \to \mathcal{U}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+$ la projection (qui est un morphisme d'algèbres de Hopf $\sqrt{h}$-adiques).

On notera $\widetilde{\mathcal{D}'} = \mathcal{D}\left(\widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+, \left(\widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+\right)^{\mathrm{op}}\right)$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{D}\left(\mathcal{U}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+, \left(\mathcal{U}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+\right)^{\mathrm{op}}\right)$. Dans les doubles quantiques, on notera $\widetilde{N}'^\circ$ la copie $1 \otimes \widetilde{N}'$ de $\widetilde{N}'$, $S(\mathcal{H}^{R'})^\circ$ la copie $1 \otimes S(\mathcal{H}^{R'})$ de $S\mathcal{H}^{R'}$, etc. En considérant que $\left(\widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+\right)^\circ$ et $\left(\mathcal{U}'_{\sqrt{h}}\mathcal{B}^\theta_+\right)^\circ$ sont $(-\mathbb{N})$-graduées, les algèbres de Hopf $\widetilde{\mathcal{D}'}$ et $\mathcal{D}'$ sont $\mathbb{Z}$-graduées. Par définition, on a alors les décompositions suivantes

$$\widetilde{\mathcal{D}'} = \widetilde{N}'\widehat{\otimes}S(\mathcal{H}^{R'})\widehat{\otimes}R'{<}\theta{>}\widehat{\otimes}\widetilde{N}'^\circ\widehat{\otimes}S(\mathcal{H}^{R'})^\circ\widehat{\otimes}R'{<}\theta^\circ{>}$$

et

$$\mathcal{D}' = N'\widehat{\otimes}S(\mathcal{H}^{R'})\widehat{\otimes}R'{<}\theta^\circ{>}\widehat{\otimes}N'^\circ\widehat{\otimes}S(\mathcal{H}^{R'})^\circ\widehat{\otimes}R'{<}\theta^\circ{>}.$$

Lemme 4. *L'algèbre de Hopf $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$ est reliée au double quantique $\widetilde{\mathcal{D}}'$ par l'homomorphisme suivant de R'-algèbres de Hopf graduées (où on a noté $q_i = q^{d_i}$)*

$$\widetilde{\Omega}' \ : \ \widetilde{\mathcal{D}}' \to \widetilde{U}_h^\theta \otimes_R R' \ : \ \begin{cases} E_i & \mapsto & E_i & \forall 1 \leq i \leq n \\ E_i^\circ & \mapsto & (q_i^{-1} - q_i) E_i^\circ & \forall 1 \leq i \leq n \\ H' & \mapsto & \sqrt{\hbar} H & \forall H \in \mathcal{H} \\ H'^\circ & \mapsto & -\sqrt{\hbar} H & \forall H \in \mathcal{H} \\ \theta & \mapsto & \theta & \\ \theta^\circ & \mapsto & \theta. & \end{cases}$$

Démonstration
Il suffit de montrer que le double quantique peut être défini par les générateurs E_i, E_i°, $1 \leq i \leq n$, H', H'°, θ, θ' et les relations

$$[H_1', H_2'] = [H_1'^\circ, H_2'^\circ] = [\theta, \theta^\circ] = [\theta, H'] = [\theta, H'^\circ] = [\theta^\circ, H'] = [\theta^\circ, H'^\circ] = 0;$$
$$\theta E_i \theta^{-1} = (-1)^{\delta i} E_i, \ \theta E_i^\circ \theta^{-1} = (-1)^{\delta i} E_i^\circ, \ \theta^\circ E_i \theta^{\circ -1} = (-1)^{\delta i} E_i^\circ;$$
$$[H', E_i] = \sqrt{\hbar} \alpha_i (H') E_i, \ [H'^\circ, E_i] = -\sqrt{\hbar} \alpha_i (H'^\circ) E_i^\circ, \ [H'^\circ, E_i^\circ] = \sqrt{\hbar} \alpha_i (H'^\circ) E_i^\circ;$$
$$[H', E_i^\circ] = -\sqrt{\hbar} \alpha_i (H') E_i^\circ, \ [E_i, E_j^\circ] = \delta_{i,j} e^{\sqrt{\hbar} H_i'^\circ} \theta^{\circ \delta i} - e^{\sqrt{\hbar} H_i'} \theta^{\delta i}.$$

□

Proposition 19. *Soit $\Psi \ : \ \widetilde{\mathcal{D}}' \to \mathcal{D}'$ l'épimorphisme d'algèbres de Hopf naturel, à savoir le produit tensoriel des projections. Alors*

$$\ker (\Psi) = I_+' . S \left(\mathcal{H}^{R'} \right) . R' {<} \theta {>} \widehat{\otimes} \left(\widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{\hbar}} \mathcal{B}_+^\theta \right)^\circ + \widetilde{\mathcal{U}}'_{\sqrt{\hbar}} \mathcal{B}_+^\circ \widehat{\otimes} I'^\circ_+ . S \left(\mathcal{H}^{R'} \right)^\circ . R' {<} \theta^\circ {>}.$$

6.4 La définition de la superalgèbre enveloppante quantifiée

On se restreint ensuite à la R-sous-algèbre unitaire de N_+' engendrée (sur R) par les E_i, $1 \leq i \leq n$.

Lemme 5. *Définissons les R-modules*

$$J_1 = \overline{I_+ . S(\mathcal{H}^R) . R {<} \theta {>} . \widetilde{N}_+^\circ}$$

et

$$J_2 = \overline{\widetilde{N}_+ . S(\mathcal{H}^R) . R {<} \theta {>} . I_+^\circ}.$$

Alors ces R-modules J_1 et J_2 sont des idéaux de Hopf de $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$.

Le théorème suivant est le principal résultat obtenu par Yamane dans [38].

Théorème 14. *Soit $(W, B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, p, D)$ comme plus haut, et posons $q_i = q^{d_i} \in R$, pour $1 \leq i \leq n$. Alors il existe une unique R-algèbre de Hopf topologiquement libre $\mathcal{U}_h^\theta = \mathcal{U}_h^\theta (W, B, p, D)$ satisfaisant*

- *La R-algèbre $\mathcal{U}_h^\theta$ contient $S\left(\mathcal{H}^R\right)$, $R{<}\theta{>}$, N_+, N_+°, comme sous-R-algèbres. On a une décomposition « triangulaire »*

$$\mathcal{U}_h^\theta \simeq N_+ \widehat{\otimes} S \left[\mathcal{H}^R \right] \widehat{\otimes} R {<} \theta {>} \widehat{\otimes} N_+^\circ;$$

- *Il existe un morphisme d'algèbres de Hopf $\Omega' \ : \ \mathcal{D}' \to \mathcal{U}_h^\theta \otimes_R R'$ tel que*

$$\Omega' (E_i) = E_i, \ \Omega' (E_i^\circ) = \left(q_i^{-1} - q_i \right) E_i^\circ, \ 1 \leq i \leq n;$$

$$\Omega' (\theta) = \Omega' (\theta^\circ) = \theta; \ \Omega' (H') = -\Omega (H'^\circ) = \sqrt{\hbar} H, \forall H' \in \mathcal{H}.$$

Démonstration
On pose $E_i^\circ = F_i\theta^{\delta i} \in \widetilde{U}_h^\theta$ pour tous $1 \leq i \leq n$. On sait qu'on a un morphisme de R'-algèbres de Hopf topologiques $\widetilde{\Omega}'\ :\ \widetilde{\mathcal{D}} \to \widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta \otimes_R R'$ satisfaisant les formules du théorème. Soit $\widetilde{N}_+^\circ$ la sous-R-algèbre unitaire de $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$ engendrée comme R-algèbre par les éléments E_i°, $1 \leq i \leq n$. Alors on a la décomposition « triangulaire » de $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$

$$\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta \simeq \widetilde{N}_+ \widehat{\otimes} S\left(\mathcal{H}^R\right) \widehat{\otimes} R{<}\theta{>} \widetilde{N}_+^\circ.$$

On définit alors $\mathcal{U}_h^\theta$ par le quotient

$$\mathcal{U}_h^\theta = \widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta / (J_1 + J_2).$$

On sait que le morphisme $\widetilde{\Omega}'\ :\ \widetilde{\mathcal{D}}' \to \widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta \otimes_R R'$ induit un morphisme $\Omega'\ :\ \mathcal{D}' \to \mathcal{U}_h^\theta \otimes_R R'$. La décomposition (et donc la liberté topologique) de $\mathcal{U}_h^\theta$ découle de celle de $\widetilde{\mathcal{U}}_h^\theta$. L'unicité des opérations de $\mathcal{U}_h^\theta$ découle du fait que $h\left(\mathcal{U}_h^\theta \otimes_R R'\right) \subset \mathrm{Im}\left(\Omega'\right)$.

□

Si on définit la partie triangulaire supérieure

$$\mathcal{U}_h\mathcal{B}_+^\theta = N_+ \widehat{\otimes} S(\mathcal{H}^R) \widehat{\otimes} R{<}\theta{>},$$

on a, par la démonstration précédente, une décomposition « triangulaire »

$$\mathcal{U}_h^\theta = N_+ \widehat{\otimes} S(\mathcal{H}^R) \widehat{\otimes} R{<}\theta{>} \widehat{\otimes} N_+^\circ.$$

On peut ensuite appliquer la construction générale indiquée au début de cette section au cas de $\mathcal{U}_h^\theta$, pour obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Soient $F_i = E_i^\circ\theta^{\delta i}\ \in \mathcal{U}_h^\theta$, $1 \leq i \leq n$, soit $\mathcal{U}_h$ la R-sous-algèbre de $\mathcal{U}_h^\theta$ engendrée topologiquement par les éléments E_i, F_i, $1 \leq i \leq n$ et $H \in \mathcal{H}$. Alors*
- *On a la décomposition $\mathcal{U}_h^\theta = \mathcal{U}_h \oplus \mathcal{U}_h.\theta$, en particulier, $\mathcal{U}_h$ est topologiquement libre ;*
- *La R-algèbre $\mathcal{U}_h$ possède une structure de superalgèbre de Hopf, pour laquelle les parités de E_i, F_i, $H \in \mathcal{H}$, sont respectivement δi, δi, 0, et telle que la R-algèbre de Hopf $\mathcal{U}_h^\theta$ déduite de celle-ci soit isomorphe à celle de départ.*

Le théorème suivant indique que l'objet construit $\mathcal{U}_h^\theta(\mathcal{G})$ est « presque » une déformation de $\mathcal{G}$.

Théorème 15. *Soit $\hat{\mathcal{U}}_h$ la R-superalgèbre de Hopf définie par $\hat{\mathcal{U}}_h = \mathcal{U}_h/\mathcal{I}.\mathcal{U}_h$, où $\mathcal{I} = \{H \in \mathcal{H} | \alpha_i(H) = 0\, \forall 1 \leq i \leq n\}$. Alors $\hat{\mathcal{U}}_h$ est topologiquement libre, et $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ et $\hat{\mathcal{U}}_h / h\hat{\mathcal{U}}_h$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{C}$-superalgèbres de Hopf.*

6.5 Les cas particuliers des algèbres de Kac-Moody symétrisables et des superalgèbres classiques

Le théorème suivant montre que la construction de Yamane se réduit à celle de Drinfel'd-Jimbo lorsque $\mathcal{G}$ est une algèbre de Kac-Moody symétrisable, en prenant pour B une base d'un système de racines de $\mathcal{G} = \mathfrak{g}$.

Théorème 16. *On suppose* $\delta i = 0\ \forall 1 \leq i \leq n$, $(\alpha_i, \alpha_i) > 0\ \forall 1 \leq i \leq n$, $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0\ \forall 1 \leq i \neq j \leq n$ *et* $a_{i,j} = \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)} \in \mathbb{Z}\ \forall 1 \leq i, j \leq n$. *On prend* $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$, *où* $d_i = \frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}$. *Alors* I_+ *est l'idéal de* $\widetilde{N}_+$ *engendré par les éléments*

$$\sum_{\nu=0}^{1-a_{i,j}} (-1)^\nu \begin{bmatrix} 1 - a_{i,j} \\ \nu \end{bmatrix}_{q_i} E_i^\nu E_j E_i^{1-a_{i,j}-\nu},\ 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Pour les superalgèbres classiques (hormis les $D(2,1;\alpha)$), Yamane donne ses choix de systèmes de racines, produits scalaires, matrices diagonales. Ensuite, au prix de pages de calculs, il explicite l'idéal I_+, c'est-à-dire qu'il obtient l'ensemble des relations nécessaires et suffisantes pour définir $\mathcal{U}_h$ à partir des générateurs E_i (en plus des relations de Weyl entre les E, les F et les H). Notons que sa construction dépend, bien que d'une façon triviale (telle que le rajout d'une extension centrale) de son choix de l'espace vectoriel W de départ.

En revenant à sa construction générale, Yamane obtient la R-matrice universelle $\mathscr{R}$ de son objet $\mathcal{U}_h^\theta$, qui en fait une algèbre de Hopf tressée[24]. Ceci lui permet de retrouver la R-matrice de la représentation fondamentale ρ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}(A_{N-1}))$, représentation qui est définie, en termes de la base usuelle de $\mathbb{C}^{N\times N}$, par

$$\rho(E_i) = e_{i,i+1},\ \rho(F_i) = \bar{d}_i e_{i+1,i};$$

$$\rho(H_i) = \bar{d}_i e_{i,i},\ \rho\theta = \sum_{i=1}^{N} \bar{d}_i e_{i,i}.$$

Cette R-matrice s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= (\rho \otimes \rho)(\mathscr{R}) = \\ & \textstyle\sum_{1\leq i<j\leq N} (q^{-1} - q)\, e_{i,j} \otimes e_{j,i} + \sum_{1\leq i<j\leq N} q^{\bar{d}_i \delta_{i,j}} (-1)^{\frac{1}{4}(1-\bar{d}_i)(1-\bar{d}_j)}\, e_{i,i} \otimes e_{j,j}. \end{aligned}$$

En outre, $\mathcal{R}(w) = w((\rho \otimes \rho)(\mathscr{R})) - w^{-1}((\rho \otimes \rho)(\mathscr{R}))^{-1}$ satisfait à l'équation de Yang-Baxter spectrale

$$\mathcal{R}_{12}(w)\,\mathcal{R}_{13}(wz)\,\mathcal{R}_{23}(z) = \mathcal{R}_{23}(z)\,\mathcal{R}_{13}(wz)\,\mathcal{R}_{12}(w).$$

[24] Étendant ainsi les résultats partiels de [25, 35, 36].

7 Convergence des méthodes de Yamane et Rosso

Le but de cette section est de prouver le résultat annoncé, à savoir la correspondance entre les objets construits par Yamane et les objets construits par Rosso.

Plus précisément, on va montrer que, pour une superalgèbre de Lie contragrédiente symétrisable (de dimension finie ou affine), l'objet que construit Yamane, limité à sa partie triangulaire supérieure, et abstraction faite de la topologie, se ramène via le remplacement des H par les K à la construction de Rosso, pour des choix idoines des $a_{i,j}$ et des d_i[25] (on prend toujours $q_{i,j} = d_i a_{i,j}$).

Par rapport aux objets construits par Rosso [30], qui sont, une fois tensorisés par R, des sous-R-algèbres non topologiques (cf. le lemme 2.9.2. de [38]) des R-algèbres considérées par Yamane, il y a également une différence au niveau de la présence ou non du centre $\mathcal{Z}(\mathcal{G}(A;\tau))$, du fait qu'en général $W \neq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}\alpha_i$ — comme pour $\mathfrak{sl}_N$ ou $\mathfrak{sl}(N,N)$. Yamane lui-même, dans notre théorème 15 ci-dessus, montre bien que, pour avoir une vraie déformation, il vaut mieux se restreindre comme Rosso [30] aux H_{α_i}, $1 \leq i \leq n$.

L'argument central est la propriété de type Milnor-Moore suivante [16, 26].

Théorème 17. *Si $B = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} B_i$ est une bigèbre graduée sur un corps de caractéristique nulle, B est isomorphe à $S_{B_0}(B_1)$ si et seulement si*

- *L'espace des éléments « primitifs » est exactement $B_0 \oplus B_1$,*
- *L'espace-quotient des éléments indécomposables est isomorphe à B_1, c'est-à-dire que*

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i\right)^2 = \bigoplus_{i=2}^{\infty} B_i.$$

Le lemme suivant est simple, mais crucial.

Lemme 6. *Soient $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ et $H = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} H_i$ des algèbres de Hopf graduées, engendrées par leurs éléments de degrés 0 et 1, et $\langle .,. \rangle$ une dualité de Hopf graduée entre A et H. Alors les éléments « primitifs » de A, de degré strictement plus grand que 1, sont dans l'idéal d'annihilation $\mathcal{I}(A)$.*

Démonstration
Soit donc $a \in A$ un élément « primitif » de degré $i_0 \geq 2$. L'expression $\langle a, h\rangle$ n'est susceptible d'être non nulle que pour $h \in H_{i_0}$. Par hypothèse, on peut écrire $h = \sum_{\eta=1}^{\omega} j_\eta k_\eta$, avec $j_\eta \in H_1$, $k_\eta \in H_{i_0-1}$, $1 \leq \eta \leq \omega$ et $\omega \in \mathbb{N}$. Alors

$$\langle a, h\rangle = \sum_{\eta=1}^{\omega} \langle a, j_\eta k_\eta\rangle = \sum_{\eta=1}^{\omega} \sum_{(a)} \langle a', j_\eta\rangle \langle a'', k_\eta\rangle = 0$$

puisque dans tout terme soit a' soit a'' est de degré 0, alors que j et k sont de degré strictement positif.

□

[25] Voir, pour les choix de systèmes de racines, de diagrammes de Dynkin, de produits scalaires et de d_i, les articles de Yamane [35] pour les superalgèbres de dimension finie, et [39] pour les superalgèbres affines.

On va donc remplacer l'algèbre $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} R\widetilde{H_i}$ par l'algèbre

$$H = \mathbb{C}\left[\mathbb{Z}^n\right] \otimes \mathbb{C}{<}\theta{>} = \mathbb{C}\left[\mathbb{Z}^n\right] \oplus \theta\mathbb{C}\left[\mathbb{Z}^n\right],$$

dont on notera les générateurs $K_i = e^{hH_i}$ et θ.

Suivant Yamane mutatis mutandis, on considère l'objet $\widetilde{U_+} \simeq H \otimes \widetilde{\mathcal{N}_+}$, où $\widetilde{\mathcal{N}_+}$ est engendré par les E_i, avec les relations (où $q = E^h$), pour tous $K, K' \in H$ et $1 \leq i, j \leq n$,

- $\theta^2 = 1,\ \theta K = K\theta$;
- $\theta E_i \theta^{-1} = (-1)^{\delta i} E_i,\ \theta F_i \theta^{-1} = (-1)^{\delta i} F_i$;
- $K_i E_j K_i^{-1} = q^{(\alpha_i, \alpha_j)} E_j$.

On munit cet objet d'une graduation en donnant aux éléments de H un degré nul et aux générateurs E_i un degré unité. La composante de degré 0 est bien sûr H et celle de degré 1 s'écrit $\left(\widetilde{U}_+\right)_1 = H \otimes V$, avec $V = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}E_i$. Les relations décrites ci-dessous, qui correspondent, au premier ordre en h, aux relations de Yamane avec les H, donnent la même structure de H-bimodule croisé à V que dans l'article de Rosso [30]

$$K_i.E_j.K_i^{-1} = q_{i,j} E_j,$$
$$E_i.E_j = (-1)^{\delta i.\delta j} E_j.E_i.$$

De même, les opérations de l'algèbre de Hopf, traduites en termes des K_i, reviennent à celles déduites par Rosso. On a notamment

$$\Delta(E_i) = \theta^{\delta i} K_i \otimes E_i + E_i \otimes 1,$$

$$\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i,$$
$$\Delta(\theta) = \theta \otimes \theta.$$

L'idéal $J_1 + J_2$ par lequel Yamane quotiente $\widetilde{U}_h^\theta$ se réduit ici à $H \otimes \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est l'idéal d'annulation de la dualité de Hopf définie sur $\widetilde{N}_+$. C'est en fait l'idéal d'annulation de la dualité de Hopf définie sur $\widetilde{U}_+$ tout entière. Si on note $U_q\mathcal{B}_+ = \widetilde{U}_+/H \otimes \mathcal{A}$, on en déduit, par la propriété de base de l'idéal d'annulation, que la dualité de Hopf est non dégénérée sur $U_q\mathcal{B}_+$.

On peut démontrer ce dernier résultat d'une autre manière, uniquement dans le cas des superalgèbres contragrédientes classiques (hormis les $D(2,1,\alpha)$) cependant. En effet, les calculs conduisant Yamane (dans les paragraphes 4 à 9 de [38]) au détail explicite de l'idéal I_+ ne dépendent pas du corps de base et ne concernent que l'algèbre $\widetilde{\mathcal{N}_+}$ engendrée par les E_i. En suivant les calculs pas à pas, on arrive donc à une conclusion analogue[26], à savoir que l'ensemble de vecteurs[27]

$$\left\{ \prod_{\alpha\in\Delta_+^{\mathrm{red}}}^{<} E_\alpha^{n_\alpha} \middle| n_\alpha \in \mathbb{Z} \text{ si } (\alpha,\alpha)\neq 0,\ n_\alpha\in\{0,1\} \text{ sinon} \right\}$$

forme une base orthogonale de $\mathcal{N}_+ = \widetilde{\mathcal{N}_+}/\mathcal{A}$[28]. Puisque la dualité de Hopf $\langle .,. \rangle$ est diagonale par bloc sur $\mathbb{C}\left[\mathbb{Z}^N\right]\otimes\mathbb{C}{<}\theta{>}\otimes\widetilde{\mathcal{N}_+}$, et qu'elle est non dégénérée sur $\mathbb{C}\left[\mathbb{Z}^N\right]$ (par hypothèse, puisque $\langle H_i, H_j\rangle = (\alpha_i,\alpha_j)$, *id est* $\langle K_i, K_j\rangle = q_{i,j}$)[29], on en déduit une base orthogonale de U_+.

Puisque l'algèbre $U_q\mathcal{B}_+$ est engendrée par ses éléments de degrés 0 et 1, il est bien évident qu'elle ne possède pas d'éléments indécomposables d'ordre strictement supérieur à 1. Puisqu'on vient de voir que la dualité de Hopf était non dégénérée, le lemme ci-dessus nous dit qu'il n'existe pas d'éléments « primitifs » de degré strictement supérieur à 1. On peut donc appliquer la propriété de Milnor-Moore, citée en début de cette sous-section, qui nous assure que $U_q\mathcal{B}_+ \simeq S_H(M)$.

Au-delà des méthodes, des choix et des présentations, les méthodes de construction de Yamane et de Rosso donnent donc des objets comparables.

[26] Le fait d'ignorer la topologie correspond ici à fixer la valeur de h (pour que $q = e^h$) et de considérer une sous-algèbre de l'algèbre considérée par Yamane. Les valeurs des $\langle \prod_{\alpha\in\Delta_+^{\mathrm{red}}}^{<} E_\alpha^{n_\alpha}, \prod_{\alpha\in\Delta_+^{\mathrm{red}}}^{<} E_\alpha^{m_\alpha}\rangle$ sont donc toujours valables dans notre cas restreint.

[27] Voir [38] pour la définition des notations.

[28] Voir [38] pour les notations. Le résultat obtenu par Yamane est une version du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pour ces objets. Notons que Zhang l'avait démontré pour $\mathfrak{gl}(m|n)$ en [43] ; et Zou pour $\mathfrak{sl}(m|n)$ en [41].

[29] En général, $n = N$ donc $\mathcal{H} = \mathbb{C}\left[\mathbb{Z}^N\right]$ et $W = H^*$; pour les autres cas ($A(n,n)$ qui donne $\mathfrak{sl}(N,N)$, voir [39]) la restriction de la forme bilinéaire reste non dégénérée. Pour la non-dégénérescence de la dualité, voir le lemme 3 ci-dessus et [39].

8 Conclusion et remerciements

L'étude de ce sujet m'a enthousiasmé pour plusieurs raisons. La physique, que j'ai volontairement ignoré ici, y est sans cesse sous-jacente, et via des domaines très variés constituant en eux-mêmes des rapprochements entre diverses constructions purement mathématiques. L'interaction entre généralisation supersymétrique des algèbres de Lie, de Kac-Moody, etc., et les groupes quantiques, se révèle et se révélera de plus en plus fructueuse. En outre, l'approche proposée par M. Rosso permet de voir un peu plus clair au milieu de tous ces objets, souvent présenté à partir de générateurs et de relations, ce qui n'aide pas à l'intuition. Enfin, cette même approche pourrait permettre d'obtenir des représentations de plus haut poids des $\mathcal{U}_q\mathcal{G}$, objectif qui n'est encore que très partiellement réalisé.

Je voudrais terminer en remerciant toutes les personnes qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à ce modeste mais existant mémoire : mes amis et ma famille, qui m'ont soutenu, mes professeurs de mathématiques, qui m'ont formé, mes professeurs de physique, qui acceptèrent que je ne pusse matériellement consacrer tout mon temps à cette discipline, mes relecteurs, et bien sûr M. Rosso, pour ses compétences mathématiques et pédagogiques, et pour sa patience.

Références

[1] A.N. Kirillov et N. Reshetikin. q-Weyl group and a multiplicative formula for universal R-matrices. *Communications in Mathematical Physics*, (134) :421–431, 1990.

[2] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie I : Algèbres de Lie.* Éléments de mathématiques. Hermann, 1960.

[3] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie VI, VII.* Éléments de mathématiques. Hermann, 1960.

[4] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits.* Éléments de mathématiques. Hermann, 1968.

[5] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie V : Groupes engendrés par des réflexions.* Éléments de mathématiques. Hermann, 1968.

[6] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie II : Algèbres de Lie libres.* Éléments de mathématiques. Hermann, 1972.

[7] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie VIII, IX, X.* Éléments de mathématiques. Hermann, 1975.

[8] C. Kassel, M. Rosso et V. Turaev. *Quantum groups and knot invariants.* Panoramas et synthèses. Société Mathématique de France, 1997.

[9] J.W. Van de Leur. Classification of contragredient Lie superalgebras of finite growth. *Communications in Algebra*, (8) :1814–1841, 1989.

[10] J. Dixmier. *Algèbres enveloppantes.* Gauthier-Villars, 1974.

[11] D. Hernandez. *Groupes quantiques : les q-caractères de Frenkel et Reshetikin pour les représentations de dimension finie des algèbres affines quantifiées.* Mémoire de DEA sous la direction de Marc Rosso, 2000–2001.

[12] N. Jacobson. *Lie algebras.* Interscience Publications, 1962.

[13] H.P. Jakobsen. *The full set of Unitarizable Highest Weight Modules of Basic Classical Lie Superalgebras.* Number 532 in Memoirs of the American Mathematical Society. A.M.S., 1994.

[14] M. Jimbo. A q-difference analogue of $\mathcal{U}(g)$ and the Yang-Baxter equation. *Letters in Mathematical Physics*, (10) :63–69, 1985.

[15] M. Jimbo. A q-analogue of $\mathcal{U}\mathfrak{gl}_{N+1}$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation. *Letters in Mathematical Physics*, 3(11) :247–252, 1986.

[16] J.W. Milnor et J.C. Moore. *On the structure of Hopf algebras.* Princeton NJ, 1949.

[17] V.G. Kac. Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR*, (32) :1323–1367, 1968.

[18] V.G. Kac. Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR*, (32) :1323–1367, 1968.

[19] V.G. Kac. Lie superalgebras. *Advance in mathematics*, 26 :8–96, 1977.

[20] V.G. Kac. Representations of classical Lie superalgebras. *Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics II*, pages 597–626, 1977.

[21] V.G. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press, 1990.

[22] C. Kassel. *Quantum groups.* Number 155 in Graduate texts in mathematics. Springer, 1995.

[23] L. Frappat, A. Sciarrino et P. Sorba. Structure of Basic Lie Superalgebras and of their Affine extensions. *Communications in Mathematical Physics*, (121) :457–500, 1989.

[24] G. Lusztig. *Introduction to quantum groups.* Number 110 in Progress in mathematics. Birkhäuser, 1993.

[25] M.D. Gould et M. Scheunert. Classification of finite-dimensional unitary irreps for $\mathcal{U}_q\mathfrak{gl}(m|n)$. *Journal of Mathematical Physics*, (36) :435–452, 1995.

[26] W. Nichols. Bialgebras of type I. *Commutative Algebra*, (15) :1521–1552, 1978.

[27] O. Gabber et V.G. Kac. On defining relations of certain infinite-dimensional Lie algebras. *Bulletin of American Mathematical Society*, pages 185–189, 1981.

[28] R. Floreanini, D.A. Leites et L. Vinet. On the defining relations of quantum superalgebras. *Letters in Mathematical Physics*, 2(23) :127–131, 1991.

[29] M. Rosso. An analogue of P.B.W. theorem and the universal R-matrix for $\mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_{N+1}}$. *Knots, topology and quantum field theories*, pages 497–506, 1989.

[30] M. Rosso. Quantum groups and quantum shuffles. *Inventiones mathematicae*, (133) :399–416, 1998.

[31] M. Scheunert. Serre-type relations for special linear Lie superalgebras. *Letters in Mathematical Physics*, (24) :173–181, 1992.

[32] George B. Seligman. *Constructions of Lie Algebras and their Modules.* Number 1300 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1988.

[33] M.E. Sweedler. *Hopf algebras.* Mathematics lecture notes. Benjamin, 1969.

[34] V.G. Drinfel'd. Quantum groups. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley*, 1,2 :798–820, 1987.

[35] H. Yamane. A Poincaré-Birkhoff-Witt theorem for quantized universal enveloping algebras of type A_N. *Publications Res. Inst. Math. Sci.*, (25) :503–520, 1989.

[36] H. Yamane. Universal R-matrices for Quantum Groups Associated to Simple Lie Superalgebras. *Proceedings of the Japan Academy*, (67), 1991.

[37] H. Yamane. A Serre type theorem for affine Lie superalgebras and their quantized enveloping superalgebras. *Proceedings of the Japan Academy*, (70) :31–36, 1994.

[38] H. Yamane. Quantized Enveloping algebras associated with simple Lie superalgebras and their R-matrices. *Publications Res. Inst. Math.Sci.*, (30) :15–87, 1994.

[39] H. Yamane. On defining relations of affine Lie superalgebras and affine quantized universal enveloping superalgebras. *Publications Res. Inst. Math. Sci.*, (35) :321–390, 1999.

[40] H. Yamane. Errata to « On defining relations of affine Lie superalgebras and affine quantized universal enveloping superalgebras ». *Publications Res. Inst. Math. Sci.*, (37) :615–619, 2001.

[41] Y.M. Zou. Deformations of Enveloping Algebra of Lie Superalgebra $\mathfrak{sl}(m, n)$. *Communications in Mathematical Physics*, pages 467–479, 1994.

[42] Y.U. Bahturin, A.A. Mikhalev, V.M. Petrodradsky, M.V. Zaicev. *Infinite dimensional Lie superalgebras.* De Gruyter expositions in mathematics. W. de Gruyter, 1992.

[43] R.B. Zhang. Finite-dimensional irreductible representations of the quantum supergroup $\mathcal{U}_q\mathfrak{gl}\,(m|n)$. *Journal of Mathematical Physics*, (34) :1236–1254, 1993.