Theorie des cordes conforme sur le tore

Jérôme Levie et Jean-Julien Fleck

DEA de Physique Théorique 2002-2003

Introduction

Le tore est, après la sphère, la surface de Riemann fermée la plus simple ; en fait l'unique surface fermée orientable de caractéristique d'Euler nulle ($\chi = 0$), donc de genre $g = \dfrac{2-\chi}{2} = 1$. Il correspond à la feuille d'univers d'une corde fermée, avec conditions périodiques sur le temps. On se place en jauge conforme euclidienne

$$\gamma_{ab} = \delta_{ab}$$

I Géométrie du tore

1 Paramétrisation

Au départ, on a une corde fermée, avec (σ_1, σ_2) identifié à $(\sigma_1 + 2\pi, \sigma_2)$ et (σ_1, σ_2) identifié à $(\sigma_1, \sigma_2 + 2\pi\,\mathrm{T})$ où $2\pi\,\mathrm{T}$ est notre période. En toute généralité, on doit envisager les conditions, avec $\tau_1 \in \mathbb{R}$ et $\tau_2 \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{cases} (\sigma_1, \sigma_2) \sim (\sigma_1 + 2\pi, \sigma_2) \\ (\sigma_1, \sigma_2) \sim (\sigma_1 + 2\pi\,\tau_1, \sigma_2 + 2\pi\,\tau_2) \end{cases}$$

Pour construire un tel tore, on peut partir d'un cylindre, de rayon de base 1, de longueur $2\pi\,\tau_2$, et recoller les deux bases après en avoir tourné une d'un angle $2\pi\,\tau_1$.

En général donc, un tore est le quotient $\mathbb{C}/\Lambda$ de $\mathbb{C}$ par un réseau $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$, où $\tau \in \mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$ (demi-plan de Poincaré).

2 Espaces des modules

Il est très facile, et classique, de voir que le groupe d'isomorphismes d'un tel réseau est le groupe modulaire

$$\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \frac{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}{\mathbb{Z}_2} = \left\{ f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} \mid \exists \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) : f(\tau) = \frac{a\,\tau + b}{c\,\tau + d} \right\}$$

engendré par les transformations $\begin{cases} \mathrm{T} : \tau \mapsto \tau + 1 \\ \mathrm{S} : \tau \mapsto -\dfrac{1}{\tau} \end{cases}$

et qui agit naturellement et analytiquement sur $\mathscr{H}$ puisque

$$\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{anal}}(\mathscr{H})$$

Deux paramètres τ et τ' représenteront donc le même tore si et seulement si

$$\tau' = f(\tau) \qquad \text{avec} \qquad f \in \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

$$\boxed{\text{L'espace des modules est donc } \mathscr{H}/\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$$

On prend généralement pour domaine fondamental la région

$$\mathscr{I} = \left\{ \tau \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}\,(\tau) < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |\tau| \geqslant 1 \right\}$$

La mesure sur l'espace des modules est $\dfrac{\mathrm{d}^2\tau}{\mathrm{Im}^{\,2}(\tau)}$.
Comme elle est invariante sous le groupe modulaire, l'intégrand d'une quantité concernant notre feuille d'univers torique devra l'être également.

Pour paramétriser le tore, on peut utiliser les « coordonnées complexes »

$$\begin{cases} w = \sigma^1 + \mathrm{i}\,\sigma^2 \\ \overline{w} = \sigma^1 - \mathrm{i}\,\sigma^2 \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad w \sim w + 2\pi \sim w + 2\pi\,\tau$$

ou encore la coordonnée $z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,w}$ avec $z \sim z\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\tau}$

On pose
$$\begin{cases} \partial = \partial_w = \dfrac{1}{2}\,(\partial_1 - \mathrm{i}\,\partial_2) \\ \overline{\partial} = \partial_{\overline{w}} = \dfrac{1}{2}\,(\partial_1 + \mathrm{i}\,\partial_2) \end{cases}$$

Ces dérivées vérifient
$$\begin{cases} \partial_w w = \partial_{\overline{w}}\overline{w} = 1 \\ \partial_w \overline{w} = \partial_{\overline{w}} w = 0 \end{cases}$$

On passe de même des coordonnées (v_1, v_2) d'un vecteur v aux coordonnées complexes

$$\begin{cases} v_z = \dfrac{1}{2}\,(v_1 - \mathrm{i}\,v_2) \\ v_{\overline{z}} = \dfrac{1}{2}\,(v_1 + \mathrm{i}\,v_2) \end{cases}$$

On pose
$$\mathrm{d}^2 z = 2\,\mathrm{d}\sigma^1 \mathrm{d}\sigma^2 \quad \text{et} \quad \delta^2(z, \overline{z}) = \frac{1}{2}\,\delta(\sigma^1)\,\delta(\sigma^2)$$

La métrique unité $g_{ij} = \mathrm{I}_2$ s'écrit ici

$$g_{z\overline{z}} = g_{\overline{z}z} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad g_{zz} = g_{\overline{z}\overline{z}} = 0$$

on a alors $g^{z\overline{z}} = g^{\overline{z}z} = 2$ et on monte et descend les indices comme suit

$$\begin{cases} v^z = g^{z\overline{z}}\,v_{\overline{z}} = \left(v^1 + \mathrm{i}\,v^2\right) \\ v^{\overline{z}} = g^{\overline{z}z}\,v_z = \left(v^1 - \mathrm{i}\,v^2\right) \end{cases}$$

On a de plus $\displaystyle\int \mathrm{d}^2 z\, \delta^2(z,\overline{z}) = 1$ et $\mathrm{d}^2 z\, \sqrt{|\det g|} = \mathrm{d}\sigma^1 \mathrm{d}\sigma^2$

Rappelons que $\displaystyle\int_{\mathrm{R}} \mathrm{d}^2 z\, \left(\partial_z v^z + \partial_{\overline{z}} v^{\overline{z}}\right) = \mathrm{i} \oint_{\partial \mathrm{R}} \left(v^z\, \mathrm{d}\overline{z} - v^{\overline{z}}\, \mathrm{d}z\right)$

L'action s'écrit dans ces coordonnées

$$\mathrm{S} = \frac{1}{4\pi\,\alpha'} \int \mathrm{d}^2\sigma\, (\partial_1 \mathrm{X}^\mu \partial_1 \mathrm{X}_\mu + \partial_2 \mathrm{X}^\mu \partial_2 \mathrm{X}_\mu) = \frac{1}{2\pi\,\alpha'} \int \mathrm{d}^2 z\, \partial \mathrm{X}^\mu\, \overline{\partial} \mathrm{X}_\mu$$

II Quelques formules utiles

1 Les fonctions thêta

On définit la fonction thêta de base

$$\theta(z|\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,n^2 \tau + 2\pi\,\mathrm{i}\,n z}$$

Elle vérifie
$$\begin{cases} \theta(z+1|\tau) = \theta(z|\tau) \\ \theta(z+\tau|\tau) = \mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,\tau - 2\pi\,\mathrm{i}\,z}\theta(z|\tau) \end{cases}$$

et
$$\begin{cases} \theta(z|\tau+1) = \theta(z+1/2|\tau) \\ \theta(z/\tau|-1/\tau) = \sqrt{-\mathrm{i}\,\tau}\, \mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,z^2/\tau}\theta(z|\tau) \end{cases}$$

Elle admet une unique racine modulo $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ en $\dfrac{\tau+1}{2}$.

Notons que, si on pose $q = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\tau}$ et $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,z}$, on a une écriture en produit infini

$$\theta(\zeta,\tau) = \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^m)\left(1+\zeta^{m-1/2}\right)\left(1+\zeta\, q^{m-1/2}\right)$$

On définit, sur les fonctions, l'action de T_a et S_b :

$$\begin{cases} (\mathrm{T}_a\, f)(z) = \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,a^2\,\tau + 2\pi\,\mathrm{i}\,a\,z}\, f(z+a\,\tau) \\ (\mathrm{S}_b\, f)(z) = f(z+b) \end{cases}$$

On utilisera aussi les fonctions thêta avec caractéristiques

$$\theta_{ab}(z|\tau) = (\mathrm{S}_b\, \mathrm{T}_a\, \theta)(z|\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,(a+m)^2 + 2\pi\,\mathrm{i}\,(m+a)(z+b)}$$

où $(a,b) \in \left\{(0,0); \left(0,\dfrac{1}{2}\right); \left(\dfrac{1}{2},0\right); \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)\right\}$. Leurs zéros respectifs sont, à Λ près, en $\dfrac{\tau+1}{2}, \dfrac{\tau}{2}, \dfrac{1}{2}$ et 0.

Leurs propriétés sous transformations modulaires sont données par

$$\begin{cases} \theta_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\tau+1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/4}\theta_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\tau) \\ \theta_{\frac{1}{2}0}(\tau+1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/4}\theta_{\frac{1}{2}0}(\tau) \\ \theta_{00}(\tau+1) = \theta_{0\frac{1}{2}}(\tau) \\ \theta_{0\frac{1}{2}}(\tau+1) = \theta_{00}(\tau) \end{cases}$$

et
$$\begin{cases} \theta_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\left(-\dfrac{1}{\tau}\right) = -\mathrm{i}\sqrt{-\mathrm{i}\,\tau}\,\theta_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\tau) \\ \theta_{\frac{1}{2}0}\left(-\dfrac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-\mathrm{i}\,\tau}\,\theta_{0\frac{1}{2}}(\tau) \\ \theta_{00}\left(-\dfrac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-\mathrm{i}\,\tau}\,\theta_{00}(\tau) \\ \theta_{0\frac{1}{2}}\left(-\dfrac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-\mathrm{i}\,\tau}\,\theta_{\frac{1}{2}0}(\tau) \end{cases}$$

Les fonctions thêta, comme on le vérifie facilement, satisfont de plus l'équation « de la chaleur »

$$\partial_z^2\theta_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2\pi}|\tau\right) = -\frac{\mathrm{i}}{\pi}\,\partial_\tau\theta_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2\pi}|\tau\right)$$

2 La fonction de Dedekind

Introduisons également la fonction de Dedekind

$$\eta(\tau) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

qui vérifie
$$\begin{cases} \eta(\tau+1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/12}\,\eta(\tau) \\ \eta\left(-\dfrac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-\mathrm{i}\,\tau}\,\eta(\tau) \end{cases}$$

Elle est liée aux fonctions thêta par

$$\eta(\tau) = \sqrt[3]{\frac{\partial_\tau\theta_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(0|\tau)}{-2\pi}}$$

3 Formule sommatoire de Poisson

La formule sommatoire de Poisson, pour une fonction continue f et un réseau $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ de réseau dual Λ^*, affirme que

$$\sum_{w\in\Lambda} f(w) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda)}\sum_{v\in\Lambda^*} f^*(v)$$

où $\mathrm{vol}(\Lambda)$ est le volume du parallélogramme fondamental du réseau et

$$f^* = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,x\,v} f(x)\,\mathrm{d}^{\mathrm{N}}x$$

Démonstration. $\mathrm{F}(y) = \sum_{w\in\Lambda} f(w+y)$ est Λ-périodique, donc s'écrit

$$\mathrm{F}(y) = \sum_{v\in\Lambda^*} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,v\,y}\,\widehat{\mathrm{F}}(v) \tag{$*$}$$

où
$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{F}}(v) &= \frac{1}{\mathrm{vol}(\Lambda)} \int_{\square\mathrm{fond}} \mathrm{d}^{\mathrm{N}} y \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,v\,y} \sum_{w\in\Lambda} f(w+y) \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}(\Lambda)} \int_{\square\mathrm{fond}} \mathrm{d}^{\mathrm{N}} y \sum_{w\in\Lambda} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,v\,(w+y)} f(w+y) \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}(\Lambda)} \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \mathrm{d}^{\mathrm{N}} \omega \sum_{w\in\Lambda} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,v\,\omega} f(\omega)\end{aligned}$$

La relation $(*)$ en $y=0$ donne la formule cherchée. □

Un cas particulier de la formule sommatoire de Poisson est l'égalité suivante
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{X}\,n^2+2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Y}\,n} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{X}}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi(j-\mathrm{Y})^2}{\mathrm{X}}}$$
pour $\mathrm{N}=1$, $\Lambda=\sqrt{\mathrm{X}}\,\mathbb{Z}$ (d'où $\Lambda^* = \frac{\mathbb{Z}}{\sqrt{\mathrm{X}}}$), $f(\zeta) = \mathrm{e}^{-\pi\left(\zeta-\mathrm{i}\frac{\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{X}}}\right)^2}$.

III Calcul des fonctions de partition

1 Scalaire non compact

On se place dans le cas d'un scalaire sans masse X^μ, non compact dans un premier temps. On va calculer l'amplitude sans vertex
$$\mathrm{Z}(\tau) = \langle 1\rangle_{\mathbb{T}^2(\tau)}$$
où $\mathbb{T}^2(\tau) = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$, $\Lambda_\tau = \mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}$ est le tore de « module » τ.

Comme on considère une période de temps de $2\pi\,\tau_2$, avec identification après translation de $2\pi\,\tau_1$ dans l'autre direction de la feuille d'univers, on peut écrire, puisque P engendre les translations suivant σ^1 et H suivant σ^2,
$$\mathrm{Z}(\tau) = \mathrm{Tr}\,\left[\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\tau_1\,\mathrm{P}-2\pi\,\tau_2\,\mathrm{H}}\right]$$

Rappelons l'action
$$\mathrm{S} = \frac{1}{2\pi\,\alpha'} \int \mathrm{d}^2 z\, \partial\mathrm{X}^\mu\overline{\partial}\mathrm{X}_\mu$$
pour laquelle le tenseur d'énergie impulsion (sans trace) s'écrit
$$\mathrm{T}_{ab} \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathrm{S}}{\delta g^{ab}} = -\frac{1}{\alpha'} : \left(\partial_a\mathrm{X}^\mu\partial_b\mathrm{X}_\mu - \frac{1}{2}\,\delta_{ab}\,\partial_c\mathrm{X}^\mu\partial^c\mathrm{X}_\mu\right) :$$

En fonction des opérateurs de Virasoro, on a les équivalences suivantes
$$\mathrm{L}_m = \oint \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\,\mathrm{i}\,z}\, z^{m+2}\,\mathrm{T}_{zz}(z) \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{T}_{zz}(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{L}_m\, z^{-(m+2)}$$
et
$$\widetilde{\mathrm{L}}_m = \oint \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\,\mathrm{i}\,z}\, z^{m+2}\,\widetilde{\mathrm{T}}_{\overline{zz}}(\overline{z}) \quad\Longleftrightarrow\quad \widetilde{\mathrm{T}}_{\overline{zz}}(\overline{z}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathrm{L}}_m\, \overline{z}^{-(m+2)}$$

ou encore, en revenant à la variable w telle que $z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,w}$,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{T}_{ww}(w) &= -\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,m\,\sigma^1 - m\sigma^2)}\,\mathrm{T}_m \\ \widetilde{\mathrm{T}}_{\overline{ww}}(\overline{w}) &= -\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,m\,\sigma^1 - m\sigma^2)}\,\widetilde{\mathrm{T}}_m \end{aligned}\right.$$

où
$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{T}_m &= \mathrm{L}_m - \delta_{m0}\,\frac{c}{24} \\ \widetilde{\mathrm{T}}_m &= \widetilde{\mathrm{L}}_m - \delta_{m0}\,\frac{\widetilde{c}}{24} \end{aligned}\right.$$

On en déduit

$$\mathrm{H} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\sigma^1}{2\pi}\,\mathrm{T}_{22} = \mathrm{L}_0 + \widetilde{\mathrm{L}}_0 - \frac{c+\widetilde{c}}{24}$$

de même
$$\mathrm{P} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\sigma^1}{2\pi\,\alpha'}\,\mathrm{T}_{12} = \mathrm{L}_0 - \widetilde{\mathrm{L}}_0$$

Un état général s'écrit

$$|\mathrm{N},\widetilde{\mathrm{N}};k\rangle = \left[\prod_{\mu=2}^{\mathrm{D}}\prod_{n=1}^{\infty}\right] \frac{(\alpha^{\mu}_{-n})^{\mathrm{N}_{\mu n}}\,(\widetilde{\alpha}^{\mu}_{-n})^{\widetilde{\mathrm{N}}_{\mu n}}}{\sqrt{n^{\mathrm{N}_{\mu n}}\,\mathrm{N}_{\mu n}!\,n^{\widetilde{\mathrm{N}}_{\mu n}}\,\widetilde{\mathrm{N}}_{\mu n}!}}\,|0,0;k\rangle$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \partial\mathrm{X}^{\mu}(z) &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\alpha^{\mu}_m\,z^{-(m+1)} \\ \overline{\partial}\mathrm{X}^{\mu}(\overline{z}) &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\widetilde{\alpha}^{\mu}_m\,\overline{z}^{-(m+1)} \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} \alpha^{\mu}_m &= \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\oint\frac{\mathrm{d}z}{2\pi}\,z^m\,\partial\mathrm{X}^{\mu}(z) \\ \widetilde{\alpha}^{\mu}_m &= \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\oint\frac{\mathrm{d}\overline{z}}{2\pi}\,\overline{z}^m\,\overline{\partial}\mathrm{X}^{\mu}(z) \end{aligned}\right.$$

Si on écrit $q = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\tau}$, on a, puisque $\widetilde{c} = 0$ et $c = d$ dans le cas des scalaires bosoniques libres, et en notant V_d le volume de l'espace temps,

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}(\tau) &= (q\,\overline{q})^{-d/24}\ \mathrm{Tr}\left[q^{\mathrm{L}_0}\,\overline{q}^{\widetilde{\mathrm{L}}_0}\right] \\ &= \mathrm{V}_d\,(q\,\overline{q})^{-d/24}\int\frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\,\mathrm{e}^{-\pi\,\tau_2\,\alpha'\,k^2}\prod_{\mu,n}\ \sum_{\mathrm{N}_{\mu n},\widetilde{\mathrm{N}}_{\mu n}\in\mathbb{N}} q^{n\,\mathrm{N}_{\mu n}}\,\overline{q}^{n\,\widetilde{\mathrm{N}}_{\mu n}} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que

$$\mathrm{L}_0 = \frac{\alpha'\,{p_{\mathrm{L}}}^2}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{\mu}_{-n}\,\alpha_{\mu n}$$

et
$$\widetilde{\mathrm{L}}_0 = \frac{\alpha'\,{p_{\mathrm{R}}}^2}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{\alpha}^{\mu}_{-n}\,\widetilde{\alpha}_{\mu n}$$

En sommant les séries géométriques, on obtient

$$\boxed{\mathrm{Z}(\tau) = \mathrm{i}\,\mathrm{V}_d\left(4\pi^2\,\alpha'\,\tau_2\right)^{-d/2}|\eta(\tau)|^{-2d}}$$

et les propriétés de modularité de η en $d = \mathrm{D} - 1 = 24$ montrent bien que $\mathrm{Z}(\tau)$ est invariante modulaire comme il se doit.

2 Les fantômes $b - c$

Les champs b et c sont, en général, de poids conformes respectifs $k_b = \lambda$ et $k_c = 1 - \lambda$. On a $c = -3\,(2\lambda - 1)^2 + 1 = -26$ et $\widetilde{c} = 0$ puisqu'ici $\lambda = 2$.

Les opérateurs de création $b_{-n}, \widetilde{b}_n, c_{-n}$ et $\widetilde{c}_n$ sont maintenant anticommutants, donc ils ne peuvent être utilisés qu'au plus une fois. L'action est

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}^2 z\, b\overline{\partial} c$$

d'où
$$\begin{aligned} \mathrm{Z}(\tau) &= \mathrm{Tr}\, \left[\mathrm{e}^{\,2\pi\,\mathrm{i}\,\tau_1\,\mathrm{P} - 2\pi\,\tau_2\,\mathrm{H}}\right] \\ &= (q\,\overline{q})^{13/12}\ \mathrm{Tr}\ q^{\mathrm{L}_0}\,\overline{q}^{\widetilde{\mathrm{L}}_0} \\ &= 4\,(q\,\overline{q})^{1/12}\ \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)^4 \end{aligned}$$

puisqu'on a 4 états fondamentaux $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\downarrow\rangle$ et qu'un oscillateur d'ordre n ne peux être utilisé qu'une fois

$$c_0|\uparrow\uparrow\rangle = 0, \quad b_0|\downarrow\uparrow\rangle = 0, \quad \widetilde{c}_0|\downarrow\downarrow\rangle = 0, \quad \text{et} \quad \widetilde{b}_0|\uparrow\downarrow\rangle = 0$$

Cependant, ceci correspond, dans l'intégrale de chemin, à des conditions aux limites anti-périodiques. Or, dans le déterminant de Fadeyev-Popov, ils ont même périodicité que celles du champ qui sont périodiques. Donc

$$\mathrm{Z}(\tau) = \mathrm{Tr}\, \left[(-1)^{\mathrm{F}}\,\mathrm{e}^{\,2\pi\,\mathrm{i}\,\tau_1\,\mathrm{P} - 2\pi\,\tau_2\,\mathrm{H}}\right] = 0$$

car les quatres états fondamentaux sont de « ghost number » opposés modulo 2, ce qui implique une trace nulle par symétries.

On peut se demander quelle est la première amplitude non nulle : $\Big\langle c(w_1)\, b(w_2)\, \widetilde{c}(w_3)\, \widetilde{b}(w_4) \Big\rangle$

Si on écrit
$$\left\{ \begin{aligned} b(z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_m\, z^{-(m+2)} \\ c(z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\, z^{-(m-1)} \end{aligned} \right.$$

et de même pour $\widetilde{b}$ et $\widetilde{c}$, seuls les termes en $m = 0$ contribuent car

$$\{b_m, c_n\} = \delta_{m,-n}$$

d'où
$$\begin{aligned} \Big\langle c(w_1)\, b(w_2)\, \widetilde{c}(w_3)\, \widetilde{b}(w_4) \Big\rangle &= \mathrm{Tr}\, \left[(-1)^{\mathrm{F}}\ c_0\, b_0\, \widetilde{c_0}\, \widetilde{b_0} \mathrm{e}^{\,2\pi\,\mathrm{i}\,\tau_1\,\mathrm{P} - 2\pi\,\tau_2\,\mathrm{H}}\right] \\ &= (q\,\overline{q})^{1/12}\ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^4 \\ &= |\eta(\tau)|^4 \end{aligned}$$

le moins apparaissant dans le produit provient du $(-1)^{\mathrm{F}}$. Seul l'état fondamental $|\downarrow\downarrow\rangle$ contribue, du fait du facteur $c_0\, b_0\, \widetilde{c_0}\, \widetilde{b_0}$.

3 Champs scalaire réel compact, théorie des cordes à 26 dimensions

On considère maintenant que la 25^{e} dimension est compactifiée

$$\mathrm{X} \sim \mathrm{X} + 2\pi\, n\, \mathrm{R} \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

On a toujours
$$\mathrm{S} = \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{2\pi\,\alpha'}\, \partial \mathrm{X}^\mu\, \overline{\partial} \mathrm{X}_\mu$$

Les moments du centre de masse sont quantifiés : $k = n/\mathrm{R}$ ($\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{R}\,\mathrm{P}}$ laisse les états invariants).

On a
$$\mathrm{X}(\sigma + 2\pi) = \mathrm{X}(\sigma) + 2\pi\,\mathrm{R}\,\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{Z},$$
nombre d'enroulement.

Vu la relation $(*)$,

$$2\pi\,\mathrm{R}\,\alpha = \oint \left(\mathrm{d}z\, \partial \mathrm{X} + \mathrm{d}\overline{z}\, \overline{\partial} \mathrm{X}\right) = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\, (\alpha_0 - \widetilde{\alpha}_0) \tag{2}$$

On est obligé d'inclure des cordes enroulées non-trivialement car une corde avec $\alpha = 0$ peut se décomposer en une corde avec $\alpha = 1$ et une corde avec $\alpha = -1$.

Le moment de Noether total s'écrit

$$p = -\frac{1}{2\pi\,\alpha'} \oint \left(\mathrm{d}z\, \partial \mathrm{X} - \mathrm{d}\overline{z}\, \overline{\partial} \mathrm{X}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}\, (\alpha_0 + \widetilde{\alpha}_0)$$

ce qui implique, par (**1**) et (**2**),

$$\begin{cases} p_{\mathrm{L}} = \sqrt{\dfrac{2}{\alpha'}}\, \alpha_0 = \dfrac{n}{\mathrm{R}} + \dfrac{\alpha \mathrm{R}}{\alpha'} \\[2ex] p_{\mathrm{R}} = \sqrt{\dfrac{2}{\alpha'}}\, \widetilde{\alpha}_0 = \dfrac{n}{\mathrm{R}} - \dfrac{\alpha \mathrm{R}}{\alpha'} \end{cases}$$

d'où
$$\begin{aligned}
\mathrm{Z_c} &= (q\,\overline{q})^{-1/24}\ \mathrm{Tr}\ q^{\mathrm{L}_0}\, \overline{q}^{\widetilde{\mathrm{L}}_0} \\
&= |\eta(\tau)|^{-2} \sum_{n,\alpha\in\mathbb{Z}} q^{\alpha' {p_{\mathrm{L}}}^2/4}\, \overline{q}^{\alpha' {p_{\mathrm{R}}}^2/4}
\end{aligned}$$

forme « hamiltonienne » de la fonction de partition

$$= |\eta(\tau)|^{-2} \sum_{n,\alpha\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\pi\tau_2 \left(\frac{\alpha'\, n^2}{\mathrm{R}^2} + \frac{\alpha^2\, \mathrm{R}^2}{\alpha'}\right) + 2\pi\,\mathrm{i}\,\tau_1\, n\, \alpha\right]$$

Formule de Poisson avec $\mathrm{X} = \dfrac{\alpha'\tau_2}{\mathrm{R}^2}$ et $\mathrm{Y} = \tau_1 \alpha$

$$= |\eta(\tau)|^{-2}\ \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\alpha'\,\tau_2}} \sum_{j,\alpha\in\mathbb{Z}} \exp\left[\frac{-\pi\,\mathrm{R}^2\, |j - \alpha\tau|^2}{\alpha'\tau_2}\right]$$

$$\mathrm{Z_c} = \frac{2\pi\,\mathrm{R}}{(4\pi^2\,\alpha'\,\tau_2)^{1/2}}\, |\eta(\tau)|^{-2} \sum_{m,\alpha\in\mathbb{Z}} \exp\left[\frac{-\pi\,\mathrm{R}^2\, |m - \alpha\tau|^2}{\alpha'\tau_2}\right]$$

expression clairement modulaire invariante.

Il y a une autre manière de calculer cette fonction de partition qui met mieux en évidence la décomposition en modes d'enroulement. On peut écrire

$$\mathrm{S} = \int \frac{d^2 z}{2\pi\,\alpha'}\,\frac{1}{\tau_2}\,|\tau\partial_1 \mathrm{X} - \partial_2 \mathrm{X}|^2 = -\int \frac{d^2 z}{2\pi\,\alpha'} \mathrm{X}\,\Delta \mathrm{X}$$

où le laplacien est défini par $\Delta \mathrm{X} = \frac{1}{\tau_2}\,|\tau\partial_1 - \partial_2|^2$

Les solutions classiques de $\Delta\mathrm{X} = 0$ sont les instantons

$$\mathrm{X}^{mn}_{\mathrm{Cl}} = 2\pi\,\mathrm{R}\,(n\,\sigma_1 + m\,\sigma_2) \qquad \text{avec } (n,m) \in \mathbb{Z}^2$$

qui sont bien périodiques $\begin{cases} \mathrm{X}^{mn}_{\mathrm{Cl}}(\sigma_1+1,\sigma_2) = \mathrm{X}(\sigma_1,\sigma_2) + 2\pi\,n\,\mathrm{R} \\ \mathrm{X}^{mn}_{\mathrm{Cl}}(\sigma_1,\sigma_2+1) = \mathrm{X}(\sigma_1,\sigma_2) + 2\pi\,m\,\mathrm{R} \end{cases}$

Leur action sont $\quad \mathrm{S}^{mn} = \frac{\pi\,\mathrm{R}^2}{\alpha'\,\tau_2}\,(m - n\,\tau)^2$

On décompose $\quad \mathrm{X} = \mathrm{X}^{mn}_{\mathrm{Cl}} + \chi$

alors $\quad \mathrm{Z} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} e^{-\mathrm{S}^{mn}} \int [\mathscr{D}\chi]\, e^{-\mathrm{S}(\chi)}$

avec $\quad \chi(\sigma_1,\sigma_2) = \chi_0 + \delta\chi(\sigma_1,\sigma_2) \qquad$ où $\quad 0 \leqslant \chi_0 < 2\pi\,\mathrm{R}$

Ensuite il reste à calculer l'intégrale sur $[\mathscr{D}\delta\chi]$

d'où $\quad \int [\mathscr{D}\chi]\, e^{-\mathrm{S}(\chi)} = \frac{2\pi\,\mathrm{R}}{\sqrt{\det'\Delta}}$

où le prime indique qu'on a enlevé le mode 0. Pour le calcul du déterminant, on prend les fonctions propres

$$\Delta\xi^{mn} = -\omega_{mn}^2\,\xi^{mn}$$

avec $\quad \xi^{mn} = e^{2\pi\,i\,m\,\sigma^1 + 2\pi\,i\,n\,\sigma^2}, \quad \omega_{mn}^2 = \frac{4\pi^2}{\tau_2}\,|m\,\tau - n|^2,$

et $\quad \int d^2\sigma\,\xi^{mn}\xi^{m'n'} = \delta_{m+m',0}\,\delta_{n+n',0}$

On obtient $\mathrm{S}\left(\delta\chi = \sum_{\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \mathrm{C}_{mn}\,\xi^{mn}\right) = \frac{1}{4\pi\,\alpha'} \sum_{\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \omega_{mn}^2\,|\mathrm{C}_{mn}|^2$

Et comme $\quad \|d\delta\chi\| = \sum_{\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} |d\mathrm{C}_{mn}|^2$

$$\int [\mathscr{D}\chi] = \int_0^{2\pi\,\mathrm{R}} d\chi_0 \prod_{\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{d\mathrm{C}_{mn}}{2\pi}$$

et
$$\int [\mathscr{D}\chi]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{S}(\chi)} = \frac{2\pi\,\mathrm{R}}{\prod\limits_{\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \omega_{mn}^2} = \frac{2\pi\,\mathrm{R}}{\sqrt{\det'\Delta}}$$

on a, puisque $\det'\Delta = 4\pi^2 :, \alpha'\,\tau_2\,|\eta(\tau)|^4$,

$$\mathrm{Z} = \frac{2\pi\,\mathrm{R}}{(2\pi)^d\;|\eta|^2\;\sqrt{\alpha'\tau_2}^{\,d}} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \mathrm{e}^{-\frac{\pi\,\mathrm{R}^2}{\alpha'\tau_2}|m-n\tau|^2}$$

en forme lagrangienne, et, en forme hamiltonienne,

$$\mathrm{Z} = \sum_{\mathbb{Z}^2} \frac{q^{p_{\mathrm{L}}{}^2/4}\,\overline{q}^{p_{\mathrm{R}}{}^2/4}}{\eta\,\overline{\eta}}$$

avec
$$\begin{cases} p_{\mathrm{L}} = \dfrac{m}{\mathrm{R}} + \dfrac{n\,\mathrm{R}}{\alpha'} \\[2ex] p_{\mathrm{R}} = \dfrac{m}{\mathrm{R}} - \dfrac{n\,\mathrm{R}}{\alpha'} \end{cases}$$
où n est le nombre d'enroulement

On retrouve l'invariance modulaire de Z car

$$\begin{array}{rcl} \tau & \mapsto & \tau+1 \\ (m,n) & \mapsto & (m+n,n) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \tau & \mapsto & -1/\tau \\ (m,n) & \mapsto & (-n,m) \end{array}$$

et les facteur $\sqrt{\tau_2}\;|\eta(\tau)|^2$ sont modulaires invariants aussi.

4 Fermions libres sur le tore

On va considérer N fermions de Weyl-Majorana sur le tore. L'action s'écrit

$$\mathrm{S} = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int \mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau \left[\partial_a \mathrm{X}^\mu \partial^a \mathrm{X}_\mu - \mathrm{i}\,\overline{\psi}^{\mathrm{A}} \gamma^a \partial_a \psi^{\mathrm{A}}\right]$$

avec somme sur A et où $\{\gamma^a, \gamma^b\} = -2\delta^{ab}$

Dans le cas de Majorana, on a $\mathrm{i}\gamma^a\partial_a$ réel, ainsi que ψ^{A} ($\overline{\psi}^{\mathrm{A}} = {}^t\psi^{\mathrm{A}}\,\gamma^0$). On a

$$\begin{cases} (\partial_0 - \partial_1)\,\psi_+^{\mathrm{A}} = 0 \\ (\partial_0 + \partial_1)\,\psi_-^{\mathrm{A}} = 0 \end{cases}$$
équation de Dirac

c'est-à-dire que les fermions se décomposent en composantes gauche $\psi_-^{\mathrm{A}}(\tau-\sigma)$ et droite $\psi_+^{\mathrm{A}}(\tau+\sigma)$.

On a 4 secteurs selon que l'on prend des conditions périodiques ou anti-périodiques pour les 2 cycles du tore. Un calcul laborieux montre que, avec A pour « antipériodique » et P pour « périodique »,

$$\begin{cases} \mathrm{Z_{AA}} = \mathrm{Tr}_{\,\mathrm{A}}\left[q^{\mathrm{L}_0 - c/24}\right] = \left(\dfrac{\theta_{00}(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{\mathrm{N}/2} \\ \mathrm{Z_{AP}} = \mathrm{Tr}_{\,\mathrm{A}}\left[(-1)^{\mathrm{F}}\, q^{\mathrm{L}_0 - c/24}\right] = \left(\dfrac{\theta_{0\frac{1}{2}}(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{\mathrm{N}/2} \\ \mathrm{Z_{PA}} = \mathrm{Tr}_{\,\mathrm{P}}\left[q^{\mathrm{L}_0 - c/24}\right] = \left(\dfrac{\theta_{\frac{1}{2}0}(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{\mathrm{N}/2} \\ \mathrm{Z_{PP}} = \mathrm{Tr}_{\,\mathrm{P}}\left[(-1)^{\mathrm{F}}\, q^{\mathrm{L}_0 - c/24}\right] = \left(-\dfrac{\theta_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{\mathrm{N}/2} \end{cases}$$

Seul $\mathrm{Z_{PP}}$ correspond à une représentation de spin impair, les autres correspondant à des représentations de spin pair.

Seule la fonction de partition totale

$$\mathrm{Z}^f_{\mathrm{N}}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{(a,b)\in\left\{0;\frac{1}{2}\right\}^2} \left|\frac{\theta_{ab}(\tau)}{\eta(\tau)}\right|^{\mathrm{N}}$$

est modulaire invariante car les transformations modulaires qui permutent les 2 cycles du tore permutent aussi les différentes conditions de bord.

En spin impair (PP), l'intégrale de chemin s'annule car chaque fermion a un mode zéro.

L'intérêt est que, pour N = 2, en faisant une resommation de Poisson

$$\begin{aligned} |\theta_{ab}|^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\tau_2}} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \exp\left[-\frac{\pi}{2\tau_2}\,(n - b + \tau(m-a))^2 + \mathrm{i}\pi\, m\, n\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\tau_2}} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \exp\left[-\frac{\pi}{2\tau_2}\,(n + \tau\, m)^2 + \mathrm{i}\pi\,(m+a)\,(n+b)\right] \end{aligned}$$

on obtient, en remettant les α',

$$\begin{aligned} \mathrm{Z} &= \frac{1}{2} \sum_{(a,b)\in\left\{0,\frac{1}{2}\right\}} \left|\frac{\theta_{ab}}{\eta}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2\,|\eta|^2\,\sqrt{2\alpha'\tau_2}} \sum_{a,b} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \exp\left[-\frac{\pi}{2\tau_2}\,(n+\tau\, m)^2 + \mathrm{i}\pi\,(m+a)\,(n+b)\right] \\ &= \frac{1}{|\eta|^2\,\sqrt{2\alpha'\tau_2}} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \exp\left[-\frac{\pi}{2\tau_2}\,(n+\tau\, m)^2\right] \end{aligned}$$

qui est la fonction de partition du boson compact avec $\mathrm{R} = 1/\sqrt{2}$ et $d = 1$.

On a en outre

$$\psi^i(z)\,\psi^j(w) \overset{\mathrm{OPE}}{=} \frac{\delta^{ij}}{z-w} + \cdots$$

On change
$$\begin{cases} \psi = \dfrac{\psi^1 + \mathrm{i}\,\psi^2}{\sqrt{2}} \\ \overline{\psi} = \dfrac{\psi^1 - \mathrm{i}\,\psi^2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Alors l'algèbre de courant s'écrit
$$\begin{cases} \mathrm{J}(z) = \,:\psi\overline{\psi}: \\ \mathrm{J}(z)\,\mathrm{J}(w) = (z-w)^{-2} + \cdots \\ \mathrm{J}(z)\,\psi(w) = \dfrac{\psi(w)}{z-w} + \cdots \\ \mathrm{J}(z)\,\overline{\psi}(w) = -\dfrac{\overline{\psi}(w)}{z-w} + \cdots \end{cases}$$

Si on part d'un boson chiral X et qu'on pose
$$\begin{cases} \mathrm{J}(z) = \mathrm{i}\,\partial\mathrm{X} \\ \psi = \,:\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{X}}: \\ \overline{\psi} = \,:\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{X}}: \end{cases}$$

on obtient la même algèbre !

Par conséquent la théorie conforme pour un fermion de Dirac est isomorphe à celle d'un boson compact avec $\mathrm{R} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

IV Spectre du boson libre compact

Si on part de la forme hamiltonienne
$$\mathrm{Z}(\mathrm{R}) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \frac{q^{{p_\mathrm{L}}^2/4}\,\overline{q}^{{p_\mathrm{R}}^2/4}}{\eta\,\overline{\eta}}$$

où
$$\begin{cases} p_\mathrm{L} = \dfrac{m}{\mathrm{R}} + \dfrac{n\mathrm{R}}{\alpha'} \\ p_\mathrm{R} = \dfrac{m}{\mathrm{R}} - \dfrac{n\mathrm{R}}{\alpha'} \end{cases}$$

Avec les courants
$$\begin{cases} \mathrm{J}(z) = \mathrm{i}\,\partial\mathrm{X} \\ \overline{\mathrm{J}}(\overline{z}) = \mathrm{i}\,\overline{\partial}\mathrm{X} \end{cases}$$

et leur algèbre
$$\begin{cases} \mathrm{J}(z)\,\mathrm{J}(w) = (z-w)^{-2} \\ \overline{\mathrm{J}}(\overline{z})\,\overline{\mathrm{J}}(\overline{w}) = (\overline{z}-\overline{w})^{-2} \end{cases}$$

On a
$$\begin{cases} \mathrm{T}(z) = -\dfrac{1}{2}\,(\partial\mathrm{X})^2 = \dfrac{1}{2}\,:\mathrm{J}^2(z): \\ \mathrm{T}(\overline{z}) = -\dfrac{1}{2}\,(\overline{\partial}\mathrm{X})^2 = \dfrac{1}{2}\,:\overline{\mathrm{J}}^2(z): \end{cases}$$

D'où le spectre des poids conformes $\begin{cases} \Delta = \dfrac{{p_L}^2}{4} \\ \overline{\Delta} = \dfrac{{p_R}^2}{4} \end{cases}$

Notons l'existence de l'opérateur marginal de poids conformes $(\Delta, \overline{\Delta}) = (1,1)$

$$\varphi = \partial X \,\overline{\partial} X = J\,\overline{J}$$

Il revient à changer le rayon effectif R. Le spectre de masse en fonction de n et α est

$$\begin{cases} 0 = n\,\alpha + N - \widetilde{N} \\ M^2 = \dfrac{n^2}{R^2} + \dfrac{\alpha^2\,R^2}{\alpha'^2} + \dfrac{2}{\alpha'}\left(N + \widetilde{N} - 2\right) \end{cases}$$

V Symétries supplémentaires et mécanisme de Higgs

On prend $R = \sqrt{\alpha'}$. La condition d'état sans masse s'écrit

$$(N+\alpha)^2 + 4N = (n-\alpha)^2 + 4\widetilde{N} = 4$$

En plus de l'état sans masse habituel, correspondant à $n = \alpha = 0$ et $N = \widetilde{N} = 1$, on a les états

- $n = \alpha = \pm 1$, $N = 0$, $\widetilde{N} = 1$
- $n = -\alpha = \pm 1$, $N = 1$, $\widetilde{N} = 0$

> Ces deux états correspondent, en théorie des cordes dont la 25^{e} dimension est compactifiée, à des bosons de jauge d'opérateurs de vertex : $\overline{\partial} X^\mu \, e^{i\,kX} \exp \pm \dfrac{2i}{\sqrt{\alpha'}} X_L^{25}$: et : $\partial X^\mu \, e^{i\,kX} \exp \pm \dfrac{2i}{\sqrt{\alpha'}} X_R^{25}$:

- $n = \pm 2$, $\alpha = N = \widetilde{N} = 0$
- $\alpha = \pm 2$, $n = N = \widetilde{N} = 0$

D'où, au lieu d'avoir pour uniques opérateurs $(1,0)$ et $(0,1)$ de l'algèbre $U(1) \times U(1)$

$$J(z) = i\,\frac{\partial X(z)}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{et} \quad \overline{J}(\overline{z}) = i\,\frac{\overline{\partial}\,\overline{X}(\overline{z})}{\sqrt{\alpha}}$$

on a $\begin{cases} j^1(z) = \, : i \cos\left(\dfrac{2}{\sqrt{\alpha'}\,X(z)}\right) : \\ j^2(z) = \, : i \sin\left(\dfrac{2}{\sqrt{\alpha'}\,X(z)}\right) : \\ j^3(z) = i\,\dfrac{\partial X(z)}{\sqrt{\alpha'}} \end{cases}$ (de même pour les $\widetilde{j}$)

symétrie exceptionnelle de jauge $SU(2) \times SU(2)$.

En théorie des cordes, cela donne des états sans masses :

- $\alpha_{-1}^{\mu}\,\overline{\alpha}_{-1}^{\nu}|0\rangle$, 25d-graviton + dilaton + tenseur antisymétrique
- $\alpha_{-1}^{\mu}\,\overline{\alpha}_{-1}^{25}|0\rangle$, graviton $(1,1)$ + vecteur de Kaluza-Klein
- $\alpha_{-1}^{25}\,\overline{\alpha}_{-1}^{\mu}|0\rangle$, vecteur du tenseur antisymétrique
- $\alpha_{-1}^{25}\,\overline{\alpha}_{-1}^{25}|0\rangle$, correspond au R de la direction compact dont l'opérateur de vertex $j^3\,\widetilde{j}^3 =: \partial \mathrm{X}^{25}\,\overline{\partial}\mathrm{X}^{25}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\mathrm{X}}$: change la métrique de $\delta\tau = -2\mathrm{i}\,\tau_2\,\varepsilon$ si $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}w\mathrm{d}\overline{w} + \varepsilon^*\,\mathrm{d}w^2 + \varepsilon\,\mathrm{d}\overline{w}^2$

Si on s'écarte du $\mathrm{R} = \sqrt{\alpha'}$, les bosons de jauge acquièrent des masses (linéaires en le déplacement comme il se doit)

$$\mathrm{M} = \frac{\left|\mathrm{R}^2 - \alpha'\right|}{\mathrm{R}\,\alpha'} \approx \frac{2}{\alpha'}\left|\mathrm{R} - \sqrt{\alpha'}\right|$$

VI T-dualité

Le spectre de masse s'écrit

$$\mathrm{M}^2 = \frac{n^2}{\mathrm{R}^2} + \frac{\alpha^2\,\mathrm{R}^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'}\left(\mathrm{N} + \widetilde{\mathrm{N}} - 2\right)$$

si R tend vers l'infini, les états enroulés deviennent infiniment massifs et les moments deviennent continus, ce qui correspond bien à la limite non-compacte. Il est plus étonnant d'observer le même comportement quand R tend vers 0 ! C'est un effet typique de la théorie conforme : le spectre de masse est invariant sous la transformation $\mathrm{R} \mapsto \dfrac{\alpha'}{\mathrm{R}}$. Cette transformation correspond à la transformation suivante des charges et des courants U(1) :

$$\begin{array}{ll} p_{\mathrm{L}}^{25} \mapsto p_{\mathrm{L}}^{25} & \qquad \mathrm{J} \mapsto \mathrm{J} \\ p_{\mathrm{R}}^{25} \mapsto -p_{\mathrm{R}}^{25} & \qquad \overline{\mathrm{J}} \mapsto -\overline{\mathrm{J}} \end{array}$$

On voit que, lorsque $\mathrm{R} = \sqrt{\alpha'}$, en plus de la symétrie exceptionnelle $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$, la théorie est auto-duale.