Intrication et fibrations de Hopf

Jérôme Levie

Table des matières

1 Introduction

On sait, depuis Jozsa [5] et d'autres, que l'intrication (« entanglement » en anglais), est à la base de l'impossibilité pratique de simuler classiquement un système quantique. Classiquement, un système est décrit comme le produit cartésien de ses sous-systèmes. Or, dans le monde quantique, il faut utiliser le produit tensoriel, ce qui introduit donc la possibilité de l'intrication, *id est* de la non-diagonalité. La simulation d'un processus quantique dont l'énergie croît linéairement en n requerra des ressources physiques exponentielles en n. Il est donc essentiel, pour le développement du calcul quantique et de la théorie de l'information quantique, d'approfondir la compréhension de l'intrication [2].

Cet exposé montre l'avancée récente, à l'aide des fibrations de Hopf et des espaces projectifs, dans la compréhension géométrique de l'intrication, notamment pour les systèmes à deux niveaux, ou qubits.

2 Définitions

2.1 Définitions générales

Conceptuellement, l'intrication, dans un système quantique, peut être définie comme l'existence de corrélations non triviales entre les sous-systèmes. Le problème de sa mesure par un nombre est complexe ; il existe en général plusieurs mesures non équivalentes (voir 2.3.).

Dans le cas d'un système binaire $H = H_1 \otimes H_2$, composé de deux systèmes de dimension N, un état pur $|\psi\rangle \in H$[1] peut en général s'écrire

$$|\psi\rangle = \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} \alpha_{r,s} |r\rangle \otimes |s'\rangle,$$

où $(|r\rangle)_{1 \leq r \leq N}$ et $(|s'\rangle)_{1 \leq s \leq N}$ sont des bases de H_1 et H_2. Un tel état est dit séparable s'il est décomposable (ou diagonal, selon les terminologies), id est s'il peut s'écrire $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Un état pur non séparable est dit intriqué.

Notons que pour les états mélangés [9], la situation est plus complexe. Un état mélangé ρ d'un système quantique $H = H_1 \otimes H_2$ (c'est-à-dire une matrice densité[2]) sera dit séparé si c'est une combinaison convexe de produit de matrices densités des sous-systèmes :

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \rho_i \otimes \rho_i', \ \alpha_i > 0, \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1.$$

En général, tout matrice densité peut s'écrire $\rho = (1 - \mu) |\psi\rangle\langle\psi| + \lambda\tilde{\rho}$, avec $\tilde{\rho}$ séparable et $0 \leq \mu \leq 1$ maximal. Alors $\tilde{\rho}$ est appelée la meilleure approximation séparable (B.S.A.) de ρ.

2.2 Décomposition de Schmidt

Si A est la matrice $(\alpha_{r,s})_{1 \leq r,s \leq N}$, soient λ_k, $1 \leq k \leq N$ les valeurs propres de $A^\dagger A$ (c'est-à-dire de l'opérateur $\rho_a = \mathrm{tr}_B (|\psi\rangle\langle\psi|)$). Alors tout état $|\psi\rangle \in H$ possède une décomposition de Schmidt

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{\lambda_k} |\tilde{k}\rangle \otimes |\tilde{k'}\rangle,$$

où $|\tilde{k}\rangle$ et $|\tilde{k'}\rangle$ sont les vecteurs propres de $A^\dagger A$ et $AA^\dagger$. La normalisation $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ implique $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1$. Cette base est l'image de la base initiale par une transformation unitaire locale de H (c'est-à-dire un produit tensoriel de transformations unitaires de H_1 et de H_2). La décomposition de Schmidt est donc unique à de telles transformations près, par contre ses coefficients λ_k ne dépendent pas de la base initiale. Ce sont aussi les valeurs propres de ρ_A.

[1] Selon le cas, on considérera l'élément $|\psi\rangle \in H$ ou l'état correspondant au sens strict, qui est le rayon $\{e^{i\alpha}|\psi\rangle | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

[2] Une matrice densité est simplement une matrice hermitienne positive.

Un état est séparable si et seulement si une et une seule valeur propre λ_k est non nulle, auquel cas elle vaut 1. Un état est dit maximalement intriqué si
$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \frac{1}{N}$.

2.3 Mesures numériques de l'intrication : la concurrence

Les trois exigences pour que χ soit une bonne mesure d'intrication sont : $\chi(|\psi\rangle) = 0$ si $|\psi\rangle$ est séparable. $\chi(U|\psi\rangle) = \chi(|\psi\rangle)$ pour toute transformation unitaire locale U. χ diminue ou reste constant lors des mesures et transmissions d'information.

On a plusieurs exemples non équivalents de telles mesures, comme les entropies généralisées de Renyi $E_\alpha(|\psi\rangle) = \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^\alpha\right)}{1-\alpha}$[3] ou les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice de Gram. Néanmoins, pour un système à deux qubits, il existe une unique (à normalisation près) mesure d'intrication, appelée concurrence.

Pour un état mixte ρ d'un système à deux qubits, la concurrence est définie [8, 9] comme le minimum sur toutes les décompositions en états purs $\rho = \sum_{i=1}^N \alpha_i |\psi\rangle\langle\psi_i|$, de la concurrence moyenne $\sum_{i=1}^N \alpha_i |\psi_i\rangle$. On a la formule explicite $c = \max\{0, \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4\}$, où $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$ sont les valeurs propres de $\Sigma_2\rho^*\Sigma_2\rho$ (où $\Sigma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2$ et où σ_2 est la matrice de Pauli $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$). On a (facilement) $0 \leq c(|\psi\rangle) \leq 1$, et $c(|\psi\rangle) = 1$ pour les états dits maximalement intriqués.

3 Fibrations de Hopf

Les fibrations de Hopf, introduites par Heinz Hopf dans les années 30 [4], sont essentiellement de trois types, selon que la fibre est $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ ou $\mathbb{S}^7$, la sphère unité des complexes, des quaternions ou des octaves de Cayley.

$\mathbb{S}^{2n-1} \xrightarrow{\mathbb{S}^1} \mathbb{CP}^{n-1}$

$\mathbb{S}^{4n-1} \xrightarrow{\mathbb{S}^3} \mathbb{HP}^{n-1}$

$\mathbb{S}^{15} \xrightarrow{\mathbb{S}^7} \mathbb{S}^8$

La définition des fibrations des deux premiers types est remarquablement simple : ce sont, en effet, les restrictions des projections $\mathbb{C}^n \to \mathbb{CP}^{n-1}$ et $\mathbb{H}^n \to \mathbb{HP}^{n-1}$ aux sphères unités des espaces $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{H}^n$ considérés comme espaces vectoriels réels.

Outre que la fibration de Hopf la plus simple, $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^3 \to \mathbb{CP}^1 = \mathbb{S}^2$, est le premier exemple d'une application homotopiquement non triviale entre une sphère et une autre de plus basse dimension, ces applications ont d'intéressantes propriétés. Leurs fibres sont parallèles, ce sont des submersions riemanniennes (pour les métriques de Fubini-Study canoniquement induites) et elles possèdent d'importants groupes de symétries[4].

[3] L'entropie de Renyi E_1 correspond en fait à l'entropie de Shannon habituelle.

[4] On les connaît exactement [3], il s'agit de $\mathcal{U}_N \cup c\mathcal{U}_N$, où c est la conjugaison, pour le premier groupe, $\frac{\mathcal{S}\mathfrak{p}\times\mathbb{S}^3}{\mathbb{Z}_2}$ pour le deuxième et $\mathcal{S}\mathfrak{pin}_9$ pour la fibration de $\mathbb{S}^{15}$.

4 Le système quantique à 1 qubit et la sphère de Bloch

La sphère de Bloch, outil très utile en optique quantique, est une représentation fidèle des états à 1 qubit. Un état $e^{i\phi}|\psi\rangle = e^{i\phi}\left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right)$ est envoyé, par une transformation qui n'est autre que la fibration de Hopf la plus simple, sur le point

$$\left(X\left(|\psi\rangle\right), Y\left(|\psi\rangle\right), Z\left(|\psi\rangle\right)\right) = \left(\langle\sigma_x\rangle_{|\psi\rangle}, \langle\sigma_y\rangle_{|\psi\rangle}, \langle\sigma_z\rangle_{|\psi\rangle}\right) = \left(2\Re\left(\bar{\alpha}\beta\right), 2\Im\left(\bar{\alpha}\beta\right), |\alpha|^2 - |\beta|^2\right)$$

de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ (où σ_x, σ_y, σ_z, sont les matrices de Pauli $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$). Cette fibration est la composée [6] de

$$h_1 \ : \ \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \ : \ (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\bar{\beta}^{-1}$$

et de la projection stéréographique inverse $p^{-1} \ : \ \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \to \mathbb{S}^2$.

La sphère de Bloch est liée à la matrice de densité $\rho_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi|$ de l'état $|\psi\rangle$ par :

$$\rho_{|\psi\rangle} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+Z & X-iY \\ X+iY & 1-Z \end{pmatrix}.$$

En fait, l'intérieur de la sphère de Bloch, la « boule » de Bloch, est en correspondance biunivoque avec les matrices de densité générales.

5 Le système quantique à 2 qubits et la fibration de Hopf

5.1 Calculs explicites

Dans le cas $N = 2$, un état s'écrit $|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$. Il est séparable si et seulement si $\alpha\delta = \beta\delta$. Pour tenter de définir l'analogue de la sphère de Bloch, on peut rendre explicite la fibration de Hopf π en l'écrivant [6], comme plus haut, comme la composée de

$$k_1 \ : \ \mathbb{S}^7 \subset \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\} \ : \ (q, q') \mapsto q\bar{q'}^{-1}a\beta^{-1}$$

et d'une projection stéréographique inverse $p^{-1} \ : \ \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\} \to \mathbb{S}^2$.

Si on note $(q, q') = (\alpha + \beta j, \gamma + \delta j,)$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, on a $Q = k_1\left((q, q')\right) = \frac{1}{\sin^2(\Omega)}\left(C_1 + C_2 j\right)$ avec $C_1 = \bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta$ et $C_2 = \alpha\delta - \beta\gamma$, où $\cos\left(\Omega\right) = \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$. On trouve finalement $\pi\left(|\psi\rangle\right) = \left(x_0\left(|\psi\rangle\right), x_1\left(|\psi\rangle\right), x_2\left(|\psi\rangle\right), x_3\left(|\psi\rangle\right), x_4\left(|\psi\rangle\right)\right)$, où

$$\begin{array}{rcl} x_0\left(|\psi\rangle\right) & = & |q|^2 - |q'|^2 \\ x_1\left(|\psi\rangle\right) & = & 2\Re\left(\bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta\right) \\ x_2\left(|\psi\rangle\right) & = & 2\Im\left(\bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta\right) \\ x_3\left(|\psi\rangle\right) & = & 2\Re\left(\alpha\delta - \beta\gamma\right) \\ x_4\left(|\psi\rangle\right) & = & 2\Im\left(\alpha\delta - \beta\gamma\right) \end{array}.$$

On peut encore écrire ces coordonnées comme des valeurs d'opérateurs : $x_0(|\psi\rangle) = \langle\sigma_z \otimes Id\rangle_{|\psi\rangle}$, $x_1(|\psi\rangle) = \langle\sigma_x \otimes I\rangle_{|\psi\rangle}$, $x_2(|\psi\rangle) = \langle\sigma_y \otimes I\rangle_{|\psi\rangle}$, $x_3(|\psi\rangle) = \Re\langle E\rangle_{|\psi\rangle}$ et $x_4(|\psi\rangle) = \Im\langle E\rangle_{|\psi\rangle}$. Dans ces expressions, E est l'opérateur d'intrication $E = -J(\sigma_y \otimes \sigma_y)$, où J est l'opérateur de conjugaison.

Notons enfin que, dans ce cas ($N = 2$), la concurrence vaut $c = 2C_2$ et les coefficients de Schmidt

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 = \sqrt{1-c^2}}{2}.$$

5.2 Vue géométrique de l'intrication

Fixons $x_0(|\psi\rangle) = \langle\sigma_z \otimes Id\rangle_{|\psi\rangle}$ à diverses valeurs. Le pôle $x_0 = 1$ est l'image d'états diagonaux $|0\rangle \otimes |\phi\rangle$. Ensuite, pour $0<x_0<1$, nous obtenons des sphères horizontales $\mathbb{S}^3_\Omega$ de rayon $\sin(2\Omega)$. Nous appellerons des états d'Ω-intrication maximale les états pour lesquels $x_0 = \cos(2\Omega)$ qui sont, pour cette contrainte, d'intrication (i. e. de concurrence) maximale. Alors les états d'intrication maximale habituels sont les états de $\frac{\pi}{4}$-intrication maximale.

L'expression générale, pour un état $|\psi\rangle$ envoyé par k_1 sur Q, est

$$|\psi_Q\rangle = \left(\cos\Omega e^{-\frac{\theta t}{2}} q, \sin\Omega e^{\frac{\theta t}{2}}\right),$$

où q (quaternion unitaire) parcourt la fibre et $t = \frac{\Im Q}{|Q|}$.

Dans le cas séparable, $Q \in \mathbb{C}$, $t = i$, et la base $\mathbb{S}^4$ se réduit à la sphère de Bloch associée au premier qubit. Dans la fibre, il faut choisir deux états $|\psi_Q\rangle$ orthogonaux

$$|0_Q\rangle = \left(\cos\Omega e^{-\frac{i\theta}{2}}|0\rangle + \sin\Omega e^{\frac{i\theta}{2}}|1\rangle\right) \otimes |0'\rangle$$

$$|1_Q\rangle = \left(\cos\Omega e^{-\frac{i\theta}{2}}|0\rangle + \sin\Omega e^{\frac{i\theta}{2}}|1\rangle\right) \otimes |1'\rangle.$$

On obtient un système à deux niveaux, sur lequel on peut utiliser la première fibration de Hopf pour retrancher la liberté de phase $\mathbb{S}^1$. On retrouve donc, comme attendu, l'espace $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ des états séparables. L'apparente asymétrie entre les deux qubits est due au choix fait de coordonnées quaternioniques, on peut restaurer la symétrie en utilisant les abondantes symétries des fibrations de Hopf.

Pour les états d'intrication maximale, $c = 1$, $C_2 = \frac{1}{2}$, donc au niveau de la base de la fibration ils correspondent à un cercle unité dans le plan (x_3, x_4). Cependant, lorsqu'on multiplie l'état initial par une phase, on voit qu'au niveau de la base, on multiplie par une phase double. L'espace des états d'intrication maximale est donc $\frac{\mathbb{S}^3}{\mathbb{Z}_2}$. On obtient le même résultat pour les états d'Ω-intrication maximale, et pour les états intriqués quelconques, via la fibration torique de $\mathbb{S}^3_\Omega$ pour chaque Ω.

On peut aussi décomposer [6] les choses d'une manière différente. Si on tronque la sphère $\mathbb{S}^4$ en ne gardant que les trois premières coordonnées, on obtient la boule $\mathbb{B}^3$. Les états séparables forment le bord $\mathbb{S}^2$, le centre correspond aux états d'intrication maximale, et les couronnes concentriques de rayon $\sqrt{1-c^2}$ correspondent aux états de concurrence c. À chacun de ces points doit être attaché un sous-ensemble de la fibre $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}^2$ pour les points intérieurs et $\mathbb{S}^2$ (la sphère de Bloch du second qubit) pour les états situés sur le bord (la sphère de Bloch du premier qubit).

6 Structures des orbites sous le groupe unitaire

6.1 Cas général

Si l'on s'intéresse à l'intrication entre deux sous-systèmes, il est utile de considérer deux états (appartenant à $\mathbb{CP}^{N^2-1}$) comme équivalents s'ils sont reliés par une transformation unitaire locale, et d'étudier la structure de $\mathbb{CP}^{N^2-1}$, espace des états purs du système H.

Si les coefficients de Schmidt d'un état $|\psi\rangle$ sont $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_N$, la structure des orbites de $|\psi\rangle$ sous transformations unitaires locales dépend de la dégénérescence de chacun des λ_k. Soit donc μ_ℓ la dégénérescence de la valeur $a_\ell \neq 0$ ($0 \leq \ell \leq s$, où s est le nombre de valeurs non nulles prises par les λ_k) parmi ses coefficients : on a donc

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \left(a_0 = 0, \ldots, 0, \underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{\mu_k}, \ldots, \underbrace{a_s, \ldots, a_s}_{\mu_s} \right).$$

Le théorème suivant découle assez facilement de la constation précédente, une fois observé qu'une transformation unitaire locale (U, V) agissant sur $|\psi\rangle$ transforme la matrice A en UA^tV.

Théorème 1. *[7] Soient $|\psi\rangle$ et ses coefficients de Schmidt comme plus haut. Alors l'orbite locale sous transformations unitaires locales de $|\psi\rangle$ est l'espace quotient*

$$\mathcal{O} \simeq \frac{\mathcal{U}_N \times \mathcal{U}_N}{\mathscr{P}_{\mu_0,\ldots,\mu_s}},$$

où $\mathscr{P}_{\mu_0,\ldots,\mu_s}$ est le sous-groupe des paires de matrices unitaires de la forme (U, V) avec

$$U = \begin{pmatrix} u_0 & & & \\ & u_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_s \end{pmatrix}$$

$$V = e^{i\phi} \begin{pmatrix} v_0 & & & \\ & u_1^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_s^* \end{pmatrix}$$

où $v_0, u_0 \in \mathcal{U}_{\mu_0}$ et $u_i \in \mathcal{U}_i$, $1 \leq i \leq s$.

Cet espace quotient est isomorphe au produit cartésien

$$\frac{\mathcal{U}_N}{\mathcal{U}_{\mu_0} \times \mathcal{U}_{mu_1} \times \cdots \times \mathcal{U}_{\mu_s}} \times \frac{\mathcal{U}_N}{\mathcal{U}_{\mu_0} \times \mathcal{U}_1}$$

et est de dimension $\dim(\mathcal{O}) = 2N^2 - 2\mu_0^2 - \sum_{\ell=1}^s \mu_\ell^s - 1.$

6.2 Cas générique et particuliers

Dans le cas générique (au sens dimensionnel, par exemple), on trouve l'orbite

$$\mathcal{O} \simeq \frac{\mathcal{U}_N}{(\mathcal{U}_1)^n} \times \frac{\mathcal{U}_N}{\mathcal{U}_1},$$

qui est de dimension $\dim(\mathcal{O}) = 2N^2 - N - 1$.

La réunion de ces orbites génériques est de mesure pleine dans $\mathbb{CP}^{N^2-1}$. Notons que, pour $N \geq 3$, le fait que la codimension des orbites des transformations unitaires est strictement supérieure à 1 implique qu'un seul nombre ne saurait caractériser entièrement l'intrication.

Pour les états séparables, $s = 1$, $\mu_0 = N - 1$ et $\mu_1 = 1$ donc l'orbite s'écrit

$$\mathcal{O} \simeq \frac{\mathcal{U}_N}{\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_{N-1}} \times \frac{\mathcal{U}_N}{\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_{N-1}}$$

et est de dimension $\dim(\mathcal{O}) = 4(N-1)$.

L'orbite des états d'intrication maximale, pour lesquels $s = 1$, $\mu_0 = 1$ et $\mu_1 = N$, s'écrit

$$\mathcal{O} \simeq \frac{\mathcal{U}_N}{\mathcal{U}_1} \simeq \frac{\mathcal{SU}_N}{\mathfrak{S}_N}.$$

6.3 Le simplexe des vecteurs de Schmidt et le cas $N = 2$

On appelle $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ un vecteur de Schmidt. Ils forment le simplexe S_N, les sommets de celui-ci représentent les N états séparables, et leur barycentre l'état d'intrication maximale. Les permutations internes des vecteurs de Schmidt étant des transformations unitaires locales, on peut se limiter à une chambre de Weyl du simplexe[5].

Dans le cas $N = 2$, on retrouve les orbites génériques $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{RP}^3$, l'orbite des états séparables $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ et l'orbite des états d'intrication maximale $\mathbb{RP}^3$.

Références

[1] Bengtsson, Brännlund, Zyczkowski. $\mathbb{CP}^n$ or entanglement illustrated.

[2] Ekert, Jozsa. Quantum Algorithms : Entanglement Enhanced Information Processing. *quant-ph/9803072.*

[3] Gluck, Warner, Ziller. The geometry of the Hopf fibrations. *Enseignement mathématique*, (32) :173–198, 1986.

[4] H. Hopf. Über die Komposition der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Math. Ann.*, (104) :637–665, 1931.

[5] Jozsa. *Entanglement and Quantum Computation.* Geometric Issues in the Foundations of Sciences. Oxford University Press, 1997.

[5] L'article [7] dessine les simplexes et liste les orbites pour les cas $N = 2, 3, 4$. Voir aussi [1] pour des représentations des orbites.

[6] Mosseri, Dandoloff. Geometry of entangled states, Bloch spheres and Bloch fibrations. *quant-ph/0108137*.

[7] Sinolecka, Zyczkowski, Kus. Manifolds of interconvertible pure states. *Act. Phys. Pol.*, 2002.

[8] W. K. Wootters. *Phys. Rev. Lett.*, (80), 1998.

[9] Wellens, Kus. Separable approximation for mixed states of composite quantum systems. *quant-ph/0104098*.