Solitons en géométrie non commutative

Jérôme Levie

Table des matières

Introduction

Cet exposé bibliographique a essentiellement trois buts : explorer la notion, omniprésente en physique, de soliton, découvrir la géométrie non commutative et ses apparitions en physique, examiner comment cette dernière géométrie influe sur l'existence et la nature des solitons. Nous verrons ainsi comment le remplacement du produit ordinaire des fonctions par le produit de Moyal change fondamentalement l'ensemble des solutions d'une équation différentielle. Avant cela, nous nous demanderons quelles théories, dans un cadre commutatif dans un premier temps, sont susceptibles d'accueillir des solitons.

Nous serons ainsi amenés naturellement à parler de théorie des cordes dans un cadre non commutatif. Enfin, les D-branes étant des solitons, l'étude de ces derniers est essentielle dans les contextes de la théorie des cordes et de la théorie M.

1 Qu'est-ce qu'un soliton ?

Un soliton est une sorte d'onde localisée (disparaissant à l'infini), de forme permanente. Les solitons doivent leur existence à la non-linéarité des équations qui gouvernent leur propagation. Leur propriété principale est de conserver (plus ou moins exactement) leur forme lors d'interactions. On a en fait, pour les solitons, quasiment un principe de superposition.

Le premier soliton fut observé dans la nature par J. Scott Russell, se promenant le long du canal Edinburgh – Glasgow en 1834. Il vit une masse d'eau longue de plusieurs mètres, haute de plus d'un mètre, arriver vers lui puis s'en éloigner en suivant les méandres du cours d'eau. Dix ans plus tard, il publiait son compte rendu et c'était le début de l'étude théorique des solitons.

La première équation qui a été étudiée dans ce but est l'équation de Korteweg-de Vries, décrivant la propagation des ondes en eau peu profonde. Sous forme normalisée, elle s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1+u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

La forme linéarisée de cette équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ donne la relation de dispersion non linéaire $\omega = k - k^3$. La différence entre la vitesse de phase $1 - k^2$ et la vitesse de groupe $1 - 3k^2$ implique alors une déformation de l'onde. Par contre, l'équation tronquée à l'ordre 1 $\frac{\partial u}{\partial t} + (1+u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, donne une onde de choc de vitesse caractéristique $1 + u$. Ces deux effets se compensent dans le cas d'une onde solitaire exacte.

Les solitons sont apparus dans bien d'autres domaines de la physique : dans l'équation de Zabusky et Kruskal (pour le modèle de Fermi-Pasta-Ulam des phonons dans un réseau anharmonique), dans l'équation de Klein-Gordon non linéaire. On a découvert des ondes solitaires en milieu élastique (gouvernées par l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$), dans un réseau de Schrödinger cubique, dans les réseaux de Toda, etc.

Une des raisons de l'intérêt porté aux solitons est qu'ils se comportent quasiment comme des particules, avec une masse et une position bien définies.

2 Solitons en théories des champs

On cherche des solutions non dissipatives, c'est-à-dire telles qu'on n'ait pas

$$\lim_{t\to\infty}\left(\max_x \Theta_{0,0}(x,t)\right) = 0$$

(où la densité d'énergie est normalisée pour être nulle dans le vide). Notons que toutes les solutions non singulières d'énergie finie des équations de Maxwell et de Klein-Gordon, en dimension strictement supérieure à 1, sont dissipatives.

2.1 Théories scalaires

Étudions les théories scalaires à $1+1$ dimensions, de lagrangien

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - U(\phi),$$

et d'énergie $E = \int \mathrm{d}x \left(\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_1\phi)^2 + U\right)$.

Pour que l'énergie reste finie, il faut donc que $\phi \to U^{-1}(\{0\})$ quand $x \to \pm\infty$. Si U a un seul zéro, on n'a donc pas de solution indépendante du temps et d'énergie finie qui soit non triviale.

Pour la théorie ϕ^4 en dimension 1, $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{2}\left(\phi^2 - a^2\right)^2$, on a la solution $\phi = a\tanh\left(\mu x\right)$, d'énergie $E = \frac{4\mu^3}{3\lambda}$. De même pour l'équation de Sine-Gordon en dimension 1

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\alpha}{\beta^2}\left(1 - \cos\left(\beta\phi\right)\right),$$

on a la solution $\phi = \frac{4}{\beta}\cot\left(e^{\sqrt{\alpha}x}\right)$, d'énergie $E = \frac{8\sqrt{\alpha}}{\beta^2}$.

Le théorème de Derrick affirme qu'il est inutile de chercher des solutions régulières d'énergie finie au-delà de la dimension un (pour les théories scalaires non commutatives).

Théorème 1. *Soit ϕ un ou plusieurs scalaires sur un espace à $D+1$ dimensions, avec un potentiel borné inférieurement. Alors il n'y a pas de solutions non triviales, non singulières, indépendantes du temps et d'énergie finie.*

Démonstration. On fixe le minimum du potentiel à zéro. Soit $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - U\left(\phi\right)$ le Lagrangien. Alors $E = T + V$, où $T = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^D x\left(\nabla\phi\right)^2$ et $V = \int \mathrm{d}^D x U\left(\phi\right)$. On a bien sûr $T \geq= 0$. En outre, $V \geq 0$, avec égalité si et seulement si ϕ est le vide de la théorie. Soit maintenant ϕ une solution indépendante du temps. Posons $\phi\left(x,\lambda\right) = \phi\left(\lambda x\right)$, alors $E = \lambda^{2-D}T + \lambda^{-D}V$ est stationnaire. D'où, en dérivant en $\lambda = 1$, $\left(2-D\right)T - DV = 0$. Si $D \neq 2$, comme les deux termes sont positifs, ils sont nuls, et ϕ est constant. Si $D = 2$, on en tire immédiatement $V = 0$, d'où ϕ est constant. $\square$

2.2 Théories de jauge

Soient ϕ un ensemble de n champs scalaires, et G un groupe compact connexe, appelé groupe de jauge. Soient T^a les générateurs de la représentation de G qui agit sur $\phi\left(x\right)$ et c^{mnp} les constantes de structures

$$\left[T^a, T^b\right] = ic^{abc}T^c.$$

On construit, à partir de ces générateurs, les champs de jauge A^a_ν, se transformant comme suit

$$A^a_\nu T^a \to gA^a_\nu T^a g^{-1} + \frac{i}{\alpha}\partial_\nu g.g^{-1},$$

où α est la constante de couplage de jauge. Pour une transformation infinitésimale $g\left(x\right) = 1 - iT^c\omega^c\left(x\right)$, ceci devient

$$\delta A^a_\nu = c^{abc}A^b_\nu\delta\omega^c + e^{-1}\partial_\nu\delta\omega^a.$$

Si on définit la dérivée covariante $D_\nu\phi = \partial_\nu\phi + i\alpha A^a_\nu T^a\phi$ et les « forces des champs » $F^a_{\nu\lambda} = \partial_\nu A^a_\lambda - \partial_\lambda A^a_\nu - \alpha c^{abc}A^b_\nu A^c_\lambda$, on a un lagrangien invariant de jauge

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}D_\mu\phi D^\mu\phi^\dagger - U\left(\phi\right).$$

Lorsqu'il n'y a que des champs de jauge, on a l'analogue du théorème de Derrick sur l'inexistence de solitons non triviaux.

Théorème 2. *Pour le lagrangien $\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\nu\lambda}F^{a\nu\lambda}$ en $n \neq 4$ dimensions spatiales, les seules solutions non singulières d'énergie finie indépendantes du temps sont les transformées de jauge de $A^a = 0$.*

2.3 Lois de conservation topologiques

On a vu que, si l'énergie restait finie, pour tout temps t,

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x,t) \in U^{-1}(\{0\}).$$

Puisque $U^{-1}(\{0\})$ est discret, $\partial_0\phi(\pm\infty,t) = 0$. Les différentes configurations à l'infini partagent l'espace des solutions en différentes parties, d'où, si on arrive à les caractériser par un ou plusieurs nombres, une « loi de conservation ». En outre, en choisissant bien les configurations, on montre que l'existence d'une loi de conservation est une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour l'apparition de solutions non-dissipatives (pas forcément indépendantes du temps.

Ainsi, en théorie ϕ^4 (avec un potentiel $U = \frac{\lambda}{2}\left(\phi^2 - a^2\right)^2$), toute solution telle que $\phi(+\infty,t) = -\phi(-\infty,t)$ est non dissipative. En effet, il existe alors x tel que $\phi(x,t) = 0$, et en ce point $\Theta_{00} \geq U(0) = \lambda\frac{a^4}{2}$, et ceci pour tout temps t, donc $\max_x \Theta_{0,0}(x,t)$ a une limite non nulle.

De telles lois de conservation sont appelées topologiques [15] car elles ne découlent pas d'une symétrie mais bien d'une propriété topologique de l'espace des solutions non singulières d'énergie finie.

Prenons une théorie de jauge sur G, groupe de Lie connexe compact, de Lagrangien $\mathscr{L} = \frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}D_\mu\phi D^\mu\phi^\dagger - U(\phi)$. On a, sous hypothèse qu'il n'y ait pas d'autre dégénérescence (pas de dégénérescence « accidentelle »), $U^{-1}(\{0\}) \simeq G/H$, où H est la symétrie résiduelle (le fixateur de l'état-vide, *id est* celui d'énergie minimale), après brisure spontanée.

Proposition 1. *Il est toujours possible de se placer dans la jauge $A_0^a(x) = 0$.*

Démonstration. Soit x un point de l'espace-temps, soit O l'origine : posons $g = \exp\left(-i\alpha \int_O^x A_\nu^a T^a \mathrm{d}x^\nu\right)$. Alors, par la transformation de jauge g^{-1}, g est envoyé sur 1 et on a bien $A_0^a = 0$ par différentiation par rapport à x. $\square$

Dans une telle jauge, on a $D_0\phi = \partial_0\phi$. Pour que l'énergie[1]

$$E = \int_1^\infty rdr\_0^{2\pi} d\theta \left(D_\mu\phi^\dagger D_\mu\phi + U(\phi)\right)$$

soit finie, on doit avoir, $\forall\theta$, $\lim_{r\to\infty}\phi(r,\theta) = \phi(\infty,\theta) \in U^{-1}(\{0\}) \simeq G/H$. On peut avoir des dépendances non triviales en les variables angulaires θ (car ce n'est pas le gradient, mais le gradient covariant $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta} + ieA_0^aT^a$, qui intervient dans l'énergie), qui sont classifiées [15], en n dimensions, par la classe d'homotopie $\pi_{n-1}(G/H) = \pi\left(\mathbb{S}^{n-1}, G/H\right)$ (c'est-à-dire les applications $\mathbb{S}^{n-1} \to G/H$ à homotopie près). On voit que, si $|U^{-1}(\{0\})| = 1 = |G/H|$, on a une seule classe d'homotopie donc pas de lois de conservation topologiques.

[1] Hors d'une sphère centrée à l'origine, car A_r y est mal défini.

Pour une théorie à un scalaire, avec une symétrie U_1, le potentiel est $U = \frac{\lambda}{2}\left(\phi^*\phi - a^2\right)^2$ et $U^{-1}(\{0\}) \simeq G/H = \{\phi = Ce^{i\sigma} | \sigma \in \mathbb{R}\} = \mathbb{S}^1$. L'invariant topologique, puisque $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, est le nombre d'enroulement $n \in \mathbb{Z}$. Toute solution avec $n \neq 0$ est non dissipative, mais seules les solutions avec $n = \pm 1$ sont stables[2].

Prenons maintenant $U = \phi^2$, mais avec ϕ un isovecteur (modèle de Georgi-Glashow à deux dimensions, sans fermions). Alors $G/H \simeq \mathbb{S}^2$. Comme « on n'attrape pas une sphère avec un lasso », on a $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \{0\}$, et on n'a pas de lois de conservation topologiques.

Toujours avec un groupe de symétrie $G = SO_3$, mais avec ϕ un isotenseur[3] 3×3, prenons un potentiel dont les zéros sont de la forme

$$\phi = 2\beta\eta^t\eta - \beta\left(1 - \eta^t\eta\right),$$

(par exemple une somme de $\operatorname{tr}(\phi^2), \operatorname{tr}(\phi^3), \operatorname{tr}(\phi^4)$, etc.) où η est un vecteur unitaire. $G/H \simeq \mathbb{RP}^2$ et on a deux classes d'homotopie (il y a deux types de lacets sur $\mathbb{RP}^2 \simeq \mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$, les lacets triviaux et ceux qui passent par le bord de la demi-sphère), donc une sorte de parité topologique conservée. D'après la correspondance de Goldstone, on a ici un méson de jauge sans masse correspondant aux rotations infinitésimales d'axe η.

Le modèle de Georgi-Glashow sans fermions en dimension 3 amène l'étude de $\pi(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$, et on a des solutions indépendantes du temps, appelées monopôles magnétiques.

En dimension 3, lorsque G est un groupe de Lie compact connexe et que H est un sous-groupe discret, $\pi_2(G/H) = \{0\}$ (d'après un théorème d'Élie Cartan) et il n'y a pas de lois de conservation topologiques.

Dans le modèle de Weinberg-Salam sans jauge ni leptons, $G = SU_2$, $G/H \simeq \mathbb{S}^3$ et $\pi(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3) = \{0\}$: il n'y a pas de lois de conservation topologiques.

Notons que coller des solutions l'une à l'autre pose des problèmes d'ambiguïtés d'assemblage. Les différents assemblages non équivalents sont à nouveau classifiées par des groupes d'homotopie, l'opération d'assemblage correspondant à la composition dans ces groupes. Rajoutons enfin que, lorsqu'il y a une symétrie interne, les objets pertinents restent les groupes de symétrie de jauge et de symétrie résiduelle.

3 Solitons en géométrie non commutative

L'exemple le plus simple de géométrie non commutative est donnée par les relations de commutations

$$[x_i, x_j] = i\theta^{ij}.$$

En dimension 2 (ou en dimension paire, *mutatis mutandis*), on se place généralement dans des coordonnées diagonalisant θ^{ij}, faisant apparaître une échelle de

[2]Cette théorie est isomorphe, pour les solutions indépendantes du temps, à la théorie de Landau-Ginzburg des superconducteurs de type II.

[3]Représenté ici par une matrice 3×3 réelle symétrique sans trace.

non-commutativité $\sqrt{\theta}$

$$\left(\theta^{ij}\right)_{1\leq i,j\leq 2}=\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

3.1 Apparition de la géométrie non commutative en théorie des cordes

Si la géométrie non commutative apparaît aussi en physique de la matière condensée, et dans la théorie de l'effet Hall quantique, on étudiera ici la manière dont elle surgit à partir de la théorie des cordes [11]. On considère une théorie de cordes ouvertes dans un espace plat M, avec un champ « de fond » de Neveu-Schwarz $B_{ij}\leq 0$ constant. L'action de la théorie est

$$S=\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\Sigma}\mathrm{d}\sigma\left(g_{ij}\partial_a x^i\partial^a x^j-2\pi i\alpha' B_{ij}\epsilon^{ab}\partial_a x^i\partial_b x^j\right),$$

où g_{ij} correspondra à une métrique de cordes fermées. L'annulation de la variation de l'action donne les équations au bord[4]

$$\left(g_{ij}\partial_n x^i+2\pi i\alpha' B_{ij}\partial_t x^j\right)|_{\partial\Sigma}=0.$$

Prenons pour fixer les idées $\Sigma=\{z=t+iy|y\geq 0\}$ (le plan supérieur, qui est équivalent conforme au disque). On a alors $\partial_n=\partial-\bar{\partial}$. Si $z,w\in\mathbb{C}$, le propagateur vaut

$$\left\langle x^i(z)\,x^j(w)\right\rangle=-\alpha'\left(g_{ij}\ln\left(\frac{z-w}{\bar{z}-\bar{w}}\right)+G_{ij}\ln(z-w)+\frac{\theta^{ij}}{2\pi\alpha'}\ln\left(\frac{z-\bar{w}}{\bar{z}-w}\right)+B^{ij}\right),$$

où $G_{ij}=\left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)^{[ij]}$ est la métrique effective vue par les cordes ouvertes, et où $\theta^{ij}=2\pi\alpha'\left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)^{\{ij\}}$.

Sur le bord, *id est* à $y=0$, on trouve

$$\left\langle x^i(t)\,x^j(s)\right\rangle=-\alpha' G_{ij}\ln(t-s)^2+\frac{i}{2}\theta^{ij}\operatorname{sgn}(t-s).$$

D'où, si $t-s\to 0$,

$$\left\langle x^i x^j\right\rangle=T\left(x^i\left(t^-\right)x^j(t)-x^i\left(t^+\right)x^j(t)\right)=i\theta^{ij},$$

où θ^{ij} est maintenant un tenseur antisymétrique constant. On est donc bien en présence de coordonnées x^i d'un espace non commutatif, d'échelle de non-commutativité donnée par $\sqrt{\theta}$.

Le produit des opérateurs de vertex tachyoniques donne la singularité principale

$$e^{ipx}(\tau).e^{iqx}(\tau')\sim(\tau-\tau')^{2\alpha' G^{ij}p_iq_j}\,e^{-\frac{i}{2}\theta_{ij}p_iq_j}e^{i(p+q)x}(\tau')+\ldots$$

[4] Dont on remarque qu'elles sont une sorte de mélange des conditions de von Neumann (obtenues à $B\to 0$) et de Dirichlet (obtenues à $B\to\infty$).

On prend ensuite une limite $\alpha' \to 0$, pour pouvoir ignorer les dimensions anormales des opérateurs de vertex : on laisse B invariant, $\alpha' \sim \sqrt{\epsilon} \to 0$ et $g_{ij} \sim \epsilon \to 0$. Dans cette limite, le propagateur vaut $\langle x^i(\tau)\, x^j(0)\rangle = \frac{i}{2}\theta^{ij}\,\mathrm{sgn}(\tau)$. Et le produit des opérateurs vertex devient le produit de Moyal $*$. Celui-ci est défini par

$$e^{ikx} * e^{ik'x} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_i k'_j} e^{i(k+k')x},$$

ou encore, pour deux opérateurs généraux A et B,

$$(A * B)(z, z') = e^{-\frac{i}{2}\theta(\partial_z \partial_{\bar{z}'} - \partial_{z'}\partial_{\bar{z}})} A(z, z')\, B(z, z')\,|_{z=z'}.$$

Il vérifie, si S est une application linéaire de M_θ dans $\mathcal{C}(M)$[5] (où M_θ est une déformation « non commutative » de $\mathcal{C}(M)$), $\hat{f}\hat{g} = S^{-1}\left(S\left(\hat{f}\right) * S(\hat{g})\right)$, en Fourier.

On peut souligner une conséquence de ce produit inhabituel : lorsqu'on multiplie deux gaussiennes centrées en 0 et de largeurs respectives σ et σ', $\psi_\sigma(x) = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$ et $\psi_{\sigma'}(x) = e^{-\frac{x^2}{\sigma'^2}}$, on trouve une gaussienne $\left(1 + \frac{\theta}{\sigma^2\sigma'^2}\right)^{-\frac{d}{2}} \psi_{\Sigma(\sigma,\sigma')}$ de largeur $\Sigma(\sigma, \sigma') = \sqrt{\frac{\sigma^2\sigma'^2+\theta^2}{\sigma^2+\sigma'^2}}$ (au lieu de $\sqrt{\frac{\sigma^2\sigma'^2}{\sigma^2+\sigma'^2}}$ classiquement). C'est-à-dire que les interactions en géométrie non commutative satisfont à une sorte de principe d'incertitude : multiplier par une gaussienne de largeur $\sigma<\sqrt{\theta}$ ne concentre pas une distribution de champ mais au contraire la disperse (la largeur s'approche donc toujours de $\sqrt{\theta}$).

Si on rajoute un terme de jauge $-i \int \mathrm{d}\tau A_i(x)\, \partial_\tau x^i$ à l'action S, on aboutit[6] à la théorie non commutative de Yang-Mills, dont la transformation de jauge est

$$\hat{\delta}\hat{A}_i = \partial_i \lambda + i\lambda * \hat{A}_i - i\hat{A}_i * \lambda.$$

3.2 Théorie scalaire non commutative

On a vu que dans le cas commutatif, à plus de deux dimensions, on ne pouvait avoir de solitons d'énergie finie, car on pouvait indéfiniment diminuer l'énergie potentielle et l'énergie cinétique en contractant les échelles. Ici, cet argument n'est plus valide car le paramètre de non-commutation Θ fournit une échelle de longueur distinguée $\sqrt{\Theta}$. De fait, pour Θ suffisamment grand, on trouve des solitons stables [14], si le potentiel a au moins deux minima.

Voyons ce que cela donne en $2 + 1$ dimensions. L'énergie s'écrit

$$E = \frac{1}{g^2} \int \mathrm{d}^2 z \left(\partial_z \phi \partial_{\bar{z}} + V(\phi)\right).$$

En redéfinissant les coordonnées

$$\begin{array}{rcl} z & \mapsto & z\sqrt{\Theta} \\ \bar{z} & \mapsto & \bar{z}\sqrt{\Theta}, \end{array}$$

[5]On a une ambiguïté de prescription d'ordre dans la définition de S, ici on a pris le symbole ordonné de Weyl $f(k) = S\left(\hat{f}\right)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int {}^t e^{-ik\hat{x}} \hat{f}(\hat{x})$.

[6]La prise de la limite est plus subtile, mais passons les détails.

on obtient[7]

$$E = \int \mathrm{d}^2 z \left(\frac{1}{2} (\partial \phi)^2 + \Theta V(\phi) \right).$$

Pour un potentiel de la forme $V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \sum_{j=3}^{r} \frac{b_j}{j} \phi^j$, on trouve, en négligeant l'énergie cinétique,

$$\sum_{j=3}^{r} b_j phi^j + m^2 \phi = 0.$$

Dans le cas commutatif, une équation telle que $\phi^2 = \pm\phi$ (pour le potentiel cubique) n'aurait que des solutions constantes, mais ici, si $\phi_0 = 2e^{-r^2}$, $\phi_0^{*2} = \phi_0$ et par récurrence $\phi_0^{*n} = \phi_0$.

On utilise ici la correspondance entre les fonctions $f(p,q)$ et les opérateurs agissant sur l'espace des états[8] $\mathscr{H}$

$$\mathcal{O}_f(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathrm{d}^2 k \tilde{f}(k) \, e^{-i(k_q \hat{q} + k_p \hat{p})},$$

où $\tilde{f}(k) = \int \mathrm{d}^2 x e^{i(k_q q + k_p p)} f(q,p)$ et $[\hat{q}, \hat{p}] = i$. Alors $\mathrm{tr}_{\mathscr{H}} \mathcal{O}_f = \frac{1}{2\pi} \int f(q,p) \, \mathrm{d}q \mathrm{d}p$ et $\mathcal{O}_f . \mathcal{O}_g = \mathcal{O}_{f*g}$.

Limitons-nous aux états à symétrie radiale. En termes d'opérateurs, la solution gńérale s'écrit $\mathcal{O} = \sum_j \alpha_j P_j$, où les α_j annulent le polynôme V' et où les opérateurs P_j sont des opérateurs de projection $P_j^2 = P_j$. On calcule que les opérateurs de projection $\mathcal{O}_n = |n\rangle\langle n|$ correspondent aux solutions

$$\phi_n\left(r^2\right) = \int \frac{\mathrm{d}^2 k}{2\pi} e^{-\frac{k^2}{4}} L_n\left(\frac{k^2}{2}\right) e^{-ikx} = 2(-1)^n e^{-r^2} L_n\left(2r^2\right),$$

où L_n est le $n$ième polynôme de Laguerre (et $\phi_0 = 2e^{-r^2}$). Et la solution générale (pas nécessairement radiale) s'écrit

$$\phi = U^\dagger \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n |n\rangle\langle n| \right) U,$$

où U est une isométrie de « $\mathcal{U}_\infty$ »(en fait, un opérateur quasi-unitaire [6], qui sera une « isométrie partielle », convient également), e.g. un opérateur de décalage $\sum_{n\in\mathbb{N}} |n\rangle\langle n+k|$: on parle de « *solution generating technique* » [8]. Cependant la symétrie $\mathcal{U}_\infty$ est spontanément brisée par toute solution, pour un groupe unitaire « fini » dépendant des multiplicités des λ_n. Les solitons de niveau n (*id est* de la forme $U^\dagger(\lambda_0\phi_0 + \cdots + \lambda_{n-1}\phi_{n-1}) U$) sont paramétrisées par $\mathcal{U}_N / \mathcal{U}_{N-n}$.

L'énergie s'écrit

$$E(\lambda_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left((2n+1) \lambda_n^2 - (2n+1) \lambda_{n+1} \lambda_n + \Theta U(\lambda_n) \right).$$

[7]Le produit sous-entendu des champs est, dans tout ce chapitre, le produit de Moyal.

[8]Comme plus haut, on reprend la prescription d'ordre de Weyl, symétrique.

L'annulation de $\frac{\partial E}{\partial \lambda_n}$ conduit[9] à la récurrence

$$\begin{cases} (n+1)\,\lambda_{n+1} - (2n+1)\,\lambda_n + n\lambda_{n-1} = \Theta/2V'(\lambda_n) & \text{si} \quad n \geq 1 \\ \lambda_1 - \lambda_0 = \Theta\frac{V'(\lambda_0)}{2} & \end{cases}$$

Ceci donne l'équation du premier ordre

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N = \frac{\Theta}{2\,(N+1)} \sum_{n=0}^{N} V'(\lambda_n) \ \text{ pour } N \geq 0.$$

Que l'énergie soit finie implique $\lambda_n \to 0$ quand $n \to \infty$. On prouve alors facilement que ces λ_n sont bornés, décroissent de manière monotone vers 0 à partir de N suffisamment grand, que $\sum_{n\in\mathbb{N}} V'(\lambda_n) = 0$ et que $\sum_{n\in\mathbb{N}} < \infty$. Ces propriétés permettent d'établir l'existence de solutions d'énergie finie (pour des polynômes de degré pair) pour Θ suffisamment grand [1].

Les solutions de la récurrence satisfont la propriété

$$|\Delta\lambda_N| = \left| \frac{\Theta}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} U'(\lambda_n) \right| < \frac{\Theta}{2} \left| \inf_{x>0} U'(x) \right|,$$

qui montre que, pour Θ petit, il n'existe aucune solution[10]. En effet, alors la somme devient l'intégrale $\int_0^{\lambda_0} V'(x)\,\mathrm{d}x$, qui est strictement positive, d'où l'existence d'un Θ_c en-deça duquel il n'y a plus convergence des λ_n.

Si ϕ_0 est un état gaussien habituel, ϕ_n représente n oscillations de taille $\sqrt{n}$ et de période $\frac{1}{\sqrt{n}}$, c'est-à-dire de moment du même ordre que la taille !

3.3 Modèle de Higgs-abélien non commutatif

Pour obtenir des solitons « vortex », on peut se placer sur une théorie de Yang-Mills non commutative ou sur un modèle Higgs-abélien non commutatif. Étudions le second cas [6, 8, 4, 5], avec le lagrangien

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{g^2} \int \mathrm{d}^2x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} + D_\mu\phi * (D^\mu\phi)^\dagger + \frac{\lambda}{2} \left(\phi * \phi^\dagger - v^2\right)^2 \right),$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$ et $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - iA_\mu * \phi$. On peut aussi écrire, en termes d'opérateurs,

$$\mathscr{L} = -\frac{2\pi\theta}{g} \operatorname{tr} \left(\frac{F^2}{4} + D_\mu\phi D_\mu\phi^\dagger + \frac{\lambda}{2} \left(\phi\phi^\dagger - v^2\right)^2 \right).$$

Le hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{2\pi\theta}{g^2} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{2} \left(E^2 + B^2\right) + D_t\phi\,(D_t\phi)^\dagger + D_i\phi\,(D_i\phi)^\dagger + \frac{\lambda}{2} \left(\phi\phi^\dagger - v^2\right)^2 \right),$$

[9] On peut également partir de l'équation variationnelle pour les opérateurs [1] $2\left[a, [a^*, \hat{\phi}]\right] + \Theta V'(\phi) = 0$, où a et a^* sont les opérateurs de création et d'annihilation habituels.

[10] Notons que la première de ces égalités entraîne, par passage à la limite $n \to \infty$, la condition nécessaire d'existence $\sum_{n\in\mathbb{N}} V'(\lambda_n)$.

les équations du mouvement [4] sont

$$\left\{ \begin{array}{rcl} D_t^2\phi - D_i^2\phi + \lambda\left(\phi\phi^\dagger - v^2\right)\phi & = & 0 \\ D_t^2 A_i + \varepsilon_{i,j} D_j B & = & J_i, \end{array} \right.$$

où $J_i = i\left(\phi\left(D_i\phi\right)^\dagger - D_i\phi\phi^\dagger\right)$.

On introduit K tel que

$$A = A_x - ia_y = -i\sqrt{\frac{2}{\theta}}\left(c - K\right),$$

où $c = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}\left(x - iy\right)$ est l'opérateur d'annihilation. Alors on a les solutions multi-vortex exactes, données par

$$K = S_m c S_m^\dagger,\ \phi = vS_m,$$

où S_m est l'opérateur de décalage $S_m = \sum_{n\in\mathbb{N}} |m+n\rangle\langle n|$. Le flux, qui s'écrit $\Phi = \theta\,\mathrm{tr}\,B$ avec $B = \frac{1}{\theta}P_m$, où $P_m = \sum_{a=0}^{m-1}$ est l'opérateur de projection, vaut m sur une telle solution.

On peut écrire le hamiltonien comme une somme de carrés plus un terme topologique, et la saturation de la limite de Bogomol'nyï a lieu quand les équation auto-duales (ou anti-auto-duales) de Bogomol'nyï

$$D_+\phi = 0,\ B = v^2 - \phi\phi^\dagger$$

sont satisfaites. D'où, pour $\lambda = 1$ et $v^2 = \theta^{-1}$, l'existence d'une solution BPS (c'est-à-dire qui sature la limite de Bogomol'nyï) stable.

En général [3] les équation BPS s'écrivent

$$\frac{1}{\theta}\left(1 - \left[K, K^\dagger\right]\right) = v^2 - \phi\phi^\dagger,\ \phi c^\dagger - K^\dagger\phi = 0.$$

Si on écrit l'ansatz

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{\sqrt{n!}}K^{\dagger n}|\phi_0\rangle\langle n|,$$

où $\phi_0 = \sqrt{\theta}\phi|0\rangle$ est un vecteur constant, on obtient l'unique équation

$$\phi\theta v^2 - 1 + \left[K, K^{-1}\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n!}K^{\dagger n}|\phi_0\rangle\langle\phi_0|K^n.$$

Si on cherche K sous la forme

$$K = \sum_{q,n\in\mathbb{N}} f_{n,q}|n\rangle\langle q+n|,$$

on trouve des solutions BPS seulement pour $1 \geq \theta v^2$, qui sont d'énergie finie seulement pour $q = 1$. Explicitement, on trouve

$$\begin{array}{rcl} K & = & \sum_{a=1}^m \sqrt{a\left(1-\theta v^2\right)}|a-1\rangle\langle a| - \sum_{n=1}^\infty k_n|n+m-1\rangle\langle n+m|, \\ \phi & = & \frac{\zeta}{\sqrt{\theta}}\left(|m\rangle\langle 0| + \sum_{n=1}^\infty \frac{\bar{k_1}\ldots\bar{k_n}}{\sqrt{n!}}|m+n\rangle\langle n|\right), \end{array}$$

avec les $q_n = |k_n^2| - n$ satisfaisant la récurrence

$$q_{n+!} + q_{n-1} - 2q_n = \frac{q_n}{n}\left(q_n - q_{n-1} + \theta v^2\right)$$

avec l'initialisation

$$\begin{array}{rcl} q_0 & = & m\left(1 - \theta v^2\right), \\ q_1 & = & m\left(1 - v^2\right) + |\zeta|^2 - \theta v^2. \end{array}$$

Alors le champ magnétique vaut

$$B = \sum_{a=0}^{m-1} v^2 |a\rangle\langle a| + \theta^{-1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(q_n - q_{n+1}\right) |n+m\rangle\langle n+m|,$$

et le flux

$$\Phi = m - \lim_{n\to\infty} q_n.$$

Si $\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers 0. Si on prend $|\zeta| = 0$ ou $\sqrt{\theta v^2}$, on obtient $\Phi = +\infty$ ou $-\infty$. On a donc, par continuité, un ζ faisant converger les q_n vers 0, et pour lequel les solutions BPS sont d'énergie finie et quantifiée.

Pour $\theta v^2 > 1$, on n'a pas de solutions BPS auto-duales mais il y a des solutions exactes non BPS stables, alors que pour $\theta v^2 \leq 1$, on a des solutions BPS, et des solutions non BPS qui ne sont pas stables. On sait qu'il existe des solutions anti-auto-duales pour θv^2 suffisamment grand ou suffisamment petit.

Notons qu'on a aussi les généralisation suivantes des solutions multi-vortex statiques

$$K = X_m c S_m^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \sum_{a=0}^{m-1} \lambda_a |a\rangle\langle a|,\ \phi = v S_m.$$

3.4 Autres solitons non commutatifs

Les solitons sur la sphère tordue (« *fuzzy sphere* ») ont également été étudiées , pour un champ scalaire [12] ou un modèle de matrices [13]. On trouve la condition d'existence des solitons

$$\theta \geq \theta_c,\ \text{où } \Theta_c V''_{\min} >> 1.$$

Pour le potentiel ϕ^4, on trouve numériquement [2] $\Theta_c V''(0) = 13,92$.

Les articles [14, 7] étudient la stabilité des solitons.

On peut également étudier les monopôles obtenus par les équations de Nahm non commutatives et la construction ADHM [8, 10].

Références

[1] B. Durhuus, T. Jonsson, R. Nest. Noncommutative Scalar Solitons : Existence and nonexistence. *hep-th/0011139*.

[2] C. G. Zhou. Noncommutative Scalar Solitons at Finite θ. *hep-th/0007255*.

[3] D. Bak. Exact Solutions of Multi Vortices and False Vaccum Bubbles in Noncommutative Abelian Higgs Theories. *hep-th/0007204*.

[4] D. Bak, K. Lee, J. H. Park. Noncommutative Vortex Solitons. *hep-th/0011099*.

[5] D. J. Gross, N. A. Nekrassov. Solitons in noncommutative gauge theory. *hep-th/0010090*.

[6] J. A. Harvey. Komaba Lectures on Noncommutative Solitons and D-Branes. *hep-th/0102076*.

[7] M. G. Jackson. The Stability of Noncommutative Scalar Solitons. *hep-th/0103217*.

[8] M. Hamanaka. ADHM/Nahm construction of Localized Solitons Non Commutative Gauge Theories. *hep-th/0109070*.

[9] M. R. Douglas, N. A. Nekrasov. Noncommutative Field Theory. *hep-th/0106048*.

[10] N. A. Nekrassov. Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories. *hep-th/0011095*.

[11] N. Seiberg, E. Witten. String Theory and Noncommutative Geometry. *hep-th/9908142*.

[12] P. Austing, T. Jonsson, L. Thorlacius. Scalar Solitons on the Fuzzy Sphere. *hep-th/0206060*.

[13] P. Valtancoli. Solitons for the fuzzy sphere from matrix model. *hep-th/0209117*.

[14] R. Gopakumar, S. Minvalla, A. Strominger. Noncommutative Solitons. *hep-th/0003160*.

[15] S. Coleman. *Aspects of symmetry — Selected Erice lectures*. Cambridge University Press, 1985.