Courbes elliptiques, fonctions $\mathscr{P}$ et fonctions θ.

Jérôme Levie
pour le groupe du travail : «Variétés abéliennes» organisé par Jérôme Plût

15 décembre 2001

Table des matières

Introduction

Dans cet exposé, nous ne considérerons que des courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$. Nous établirons l'équivalence des deux définitions usuelles (l'«uniformisation») de deux manières différentes : au moyen des fonctions $\mathscr{P}$ de Weierstrass et au moyen des fonctions thêta. L'intérêt de cette dernière méthode est qu'elle se généralise aux variétés abéliennes [4].

Définition 1. *Une courbe elliptique est un groupe de Lie complexe, compact, connexe de dimension 1.*

Le théorème général suivant [1] éclaircit la structure des groupes de Lie complexes compacts connexes.

Théorème 1. *Soit G un groupe de Lie complexe, compact, connexe, de dimension d. Alors il existe un réseau Λ de $\mathbb{C}^d$ tel que $G \cong \mathbb{C}^d/\Lambda$.*

Démonstration. Prouvons d'abord que G est commutatif.

Posons, pour $x \in G$, $C_x = xyx^{-1}$. Alors $(\mathrm{d}C_g)_e \in \mathrm{Aut}\,(V)$, où $V = T_eG$ est l'algèbre de Lie de G ; et $C : G \to \mathrm{Aut}\,(V) : g \mapsto (\mathrm{d}C_g)_e$ est holomorphe. L'algèbre de Lie V étant de dimension finie, on en déduit que $\forall g \in G,\ (\mathrm{d}C_x)_e = I_V$. Rappelons que, en général, si $f : G_1 \to G_2$ est un homomorphisme de groupes de Lie, $f\left(\exp_{G_1} y\right) = \exp_{G_2}\left((\mathrm{d}f)_e\, y\right)$. Appliquant cela à C_x, on trouve $C_x(\exp y) = \exp y$. D'autre part $\mathrm{d}\,(\exp)_0 = I_V$, donc on a un isomorphisme d'un voisinage de 0 dans V dans un voisinage de e dans G. Le groupe est engendré par $\exp\,(V)$, et est donc commutatif.

On vérifie que exp est un homomorphisme holomorphe. Comme $\exp(V)$ contient un voisinage de e dans G, il contient un sous-groupe ouvert et fermé. Par connexité de G, l'homomorphisme exp : $V \to G$ est donc surjectif ; soit $\Lambda \subset V$ son noyau. Comme il existe un voisinage de 0 sur lequel exp est injectif, Λ est un sous-groupe discret. Comme $V/\Lambda \to G$ est holomorphe et est un isomorphisme de groupes, c'est un isomorphisme de groupes de Lie. Par suite V/Λ est compact, et V est un réseau. $\square$

Une définition plus concrète de courbe elliptique est donc la suivante :

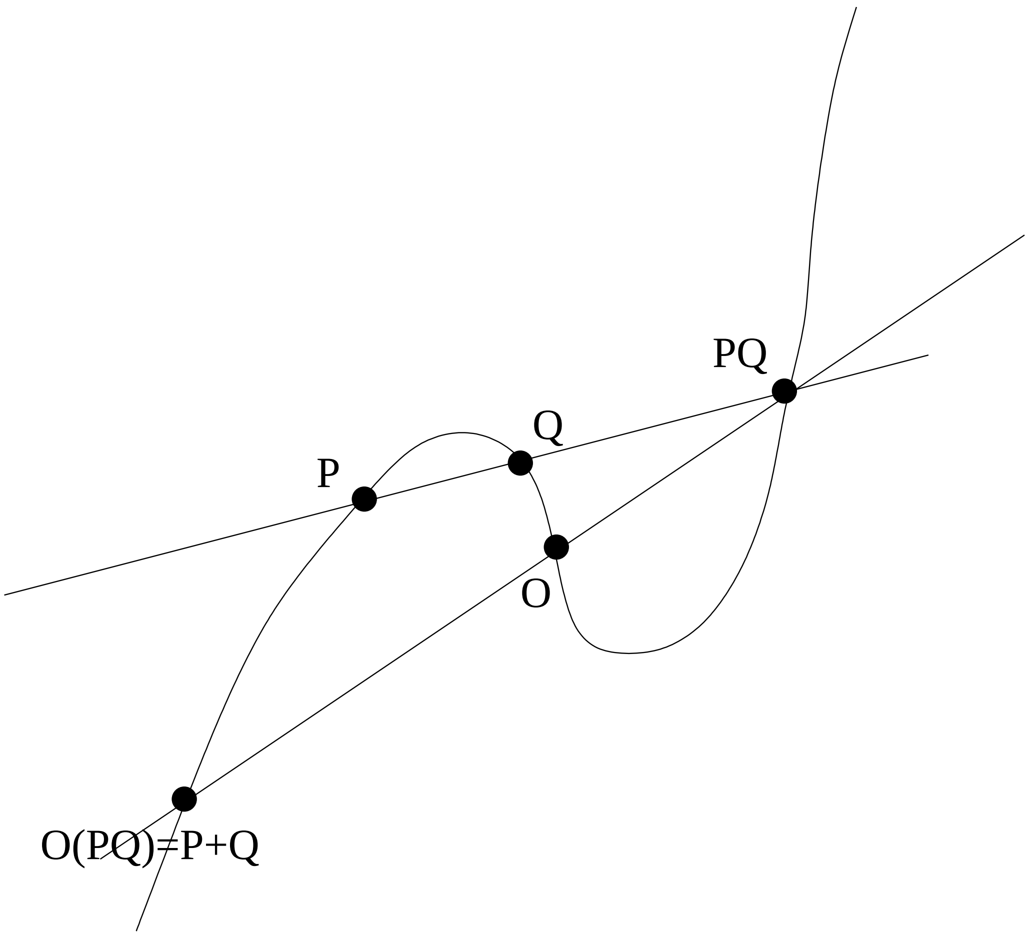
Définition 2. *Une courbe elliptique est un quotient $\mathbb{C}/\Lambda$, où Λ est un réseau plein de $\mathbb{C}$, muni de sa structure de groupe naturelle.*

On peut toujours écrire $\Lambda = \mathbb{Z} \bigoplus \tau\mathbb{Z}$ avec $\tau \in \mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0\}$, nous noterons le réseau correspondant Λ_τ. Deux réseaux Λ et Λ' de $\mathbb{C}$ sont dits équivalents s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\lambda\Lambda = \Lambda'$.

La définition alternative d'une courbe elliptique (sur $\mathbb{C}$) est la suivante :

Définition 3. *Une courbe elliptique est une cubique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, non singulière, munie d'un point O et de la structure de groupe correspondante.*

Voici une description de cette structure de groupe : si $P, Q \in \mathscr{C}$, génériquement la droite passant par P et Q coupe une troisième fois la cubique (pour les cas non génériques, on considérera un point de tangence comme un point d'intersection double), notons ce point PQ. Le point $P + Q$ est alors défini comme le point $O(PQ)$.



Nous n'allons pas démontrer que ceci est une loi de groupe : cela se fait, soit en utilisant le théorème de Bezout sur les intersections de courbes [7], soit en remarquant que cette loi de groupe se ramène à la loi du groupe de Picard. Notons qu'un changement de point-base O donne lieu à des lois de groupe canoniquement isomorphes (si $O, O' \in \mathscr{C}$, $(E, O) \to (E, O') : P \mapsto P(OO')$ est un isomorphisme entre les deux courbes elliptiques).

En général, une telle courbe a une équation du type

$$\mathscr{C} \equiv aw^3 + bwx^2 + cwy^2 + dwxy + ewx^2 + fw^2y + gx^3 + hy^3 + px^2y + qxy^2 = 0.$$

Proposition 1. *Si $\mathscr{C}$ est une courbe elliptique, on a un point d'inflexion* $(1 : r : s) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Démonstration. Si $\mathscr{C}$ est définie par un polynôme f, au voisinage de $(1 : r : s) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$,

$$f(1, x + r, y + s) = f_1(r, s)(x, y) + f_2(r, s)(x, y) + f_3(r, s)(x, y);$$

$(1 : r : s)$ est un point singulier si et seulement si $f_1(r, s)(x, y) \neq 0$; et $(1 : r : s)$ est un point d'inflexion si et seulement si $f_1 | f_2$ dans $k[x, y]$. Cette condition est équivalente à la nullité du résultant : $R(r, s) = R(f_1(r, s), f_2(r, s)) = 0$. Cette dernière équation a toujours une solution dans $\mathbb{C}^2$. □

En envoyant le point d'inflexion à l'infini [2], ramenant ainsi la courbe dans le plan (x, y) (à part bien sûr le point d'inflexion) ; et en faisant des changements d'échelle évidents, on arrive à la forme

$$\mathscr{C} \equiv y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6.$$

En complétant le carré à gauche (c'est-à-dire en faisant le changement de variables $y' = y - \frac{a_1x}{2}$), on obtient

$$\mathscr{C} \equiv y^2 + b_3y = x^3 + b_2x^2 + b_4x + b_6.$$

Enfin, si on pose $x' = x - \frac{a_2}{3}$, on obtient la forme normale de Weierstrass

$$\mathscr{C} \equiv y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Sur cette forme, on vérifie facilement que la non-singularité de $\mathscr{C}$ est équivalente à la propriété

$$\Delta = g_2 - 27g^3 \neq 0$$

(Δ est alors appelé le discriminant de la courbe elliptique).

Définition 4. *On appelle changements admissibles les changements de variables* $(x', y') = (P_1(x, y), P_2(x, y))$*, avec* $P_1, P_2 \in k[X, Y]$*, qui conservent la forme normale.*

Il est facile de trouver la forme générale de ces changements admissibles

$$\begin{cases} x' = u^2x + r \\ y' = u^3y + su^2x + t. \end{cases}$$

1 Uniformisation par $(\mathscr{P}, \mathscr{P}')$

1.1 Fonctions elliptiques

Nous allons considérer des fonctions périodiques par rapport à notre réseau $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} \bigoplus \tau\mathbb{Z}$. Soient $P = \{t + s\tau | s, t \in]0; 1[\}$ le parallélogramme fondamental du réseau, ∂P son bord.

Définition 5. *Une fonction elliptique est une fonction méromorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Λ_τ-périodique.*

Une telle fonction f définit donc une fonction $\bar{f} : \mathbb{C}/\Lambda_\tau$. On vérifie que ces fonctions forment un corps, noté $\mathscr{M}(\Lambda_\tau)$. Toute fonction elliptique étant constante, il est indispensable de considérer des fonctions méromorphes.

Lemme 1. *Soit f une fonction elliptique sans pôles ni zéros sur ∂P. Alors, si $\operatorname{ord}_a f$ désigne l'ordre du zéro ou du pôle a pour f, on a*

$$\sum_{a \in P} \operatorname{ord}_a f = 0 \text{ et} \sum_{a \in P} a. \operatorname{ord}_a f \in \Lambda.$$

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit d'utiliser le théorème des résidus : on a, puisque $\frac{f}{f'}$ n'a pas de pôles,

$$\sum_{a \in P} \operatorname{ord}_a f = \oint_{\partial P} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} \frac{f(z)}{f'(z)} = 0.$$

Pour la seconde, le théorème des résidus donne

$$\sum_{a \in P} a. \operatorname{ord}_a f = \oint_{\partial P} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} \frac{z f'(z)}{f(z)}.$$

En outre,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial P} \tfrac{\mathrm{d}z}{2\pi i} \tfrac{z f'(z)}{f(z)} &= \left(\int_0^\tau + \int_\tau^{\tau+1} + \int_{\tau+1}^1 + \int_1^0 \right) \tfrac{z f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z \\ &= \left(\left(\int_0^\tau - \int_1^{1+\tau} \right) + \left(\int_\tau^{\tau+1} - \int_0^1 \right) \right) \tfrac{z f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Le deuxième terme vaut $\tau \int_0^1 \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z$ et est donc dans $\mathbb{Z}\tau$. On conclut de même que le premier terme est dans $\mathbb{Z}$.

$\square$

Le lemme suivant est très facile et sera constamment utilisé dans la suite.

Lemme 2. *Notons $\widetilde{\Lambda_\tau}$ le réseau Λ_τ privé de 0. Alors $\sum_{\omega \in \Lambda_\tau} \omega^{-s} = 0$.*

1.2 Fonctions $\mathscr{P}$ de Weierstrass

De la partie précédente il ressort notamment qu'il est impossible qu'une fonction elliptique [3, 2] possède un et un seul pôle simple. La fonction $\mathscr{P}$ de Weierstrass est une des fonctions elliptiques non constantes les plus simples, puisqu'elle a un unique pôle double, en 0.

Définition 6. *Les fonctions «de Weierstrass» sont définies comme suit*

$$\mathscr{P}(z; \tau) = z^{-2} + \sum_{\omega \in \widetilde{\Lambda_\tau}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right);$$

$$\zeta(z;\tau) = z^{-1} + \sum_{\omega\in\widetilde{\Lambda_\tau}} \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right);$$
$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} (m\tau+n)^{-2k};$$
$$g_2(\tau) = 60G_2(\tau)\,,\ g_3(\tau) = 140G_3(\tau).$$

Il suit de cette définition que $\mathscr{P}'(z) = -2\sum_{\omega\in\widetilde{\Lambda_\tau}} \frac{1}{(z-w)^3}$ et que $\zeta' = -\mathscr{P}$. Le lemme suivant s'obtient par simple manipulation.

Lemme 3.
$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{k\geq 2} G_{2k} z^{2k-1},$$
$$\mathscr{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k\geq 2} G_{2k}(2k-1)z^{2k-2}.$$

Les fonctions $\mathscr{P}$ vérifient de nombreuses propriétés fascinantes, dont les formules d'addition suivantes.

Proposition 2. *Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors*
$$\mathscr{P}(z_1+z_2) = -\mathscr{P}(z_1) - \mathscr{P}(z_2) + \frac{1}{4}\left(\frac{\mathscr{P}'(z_1) - \mathscr{P}'(z_2)}{\mathscr{P}(z_1) - \mathscr{P}(z_2)}\right)^2,$$
$$\mathscr{P}(2z) = -2\mathscr{P}(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\mathscr{P}''(z)}{\mathscr{P}'(z)}\right)^2.$$

En outre, le corps des fonctions elliptiques sur Λ_τ peut être obtenu en prenant des fractions rationnelles de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{P}'$. Le corps des fonctions elliptiques paires vaut $\mathscr{M}_{\text{pair}}(\Lambda_\tau) = \mathbb{C}(\mathscr{P})$, c'est-à-dire est formé des fractions rationnelles de $\mathscr{P}$[1].

Remarquons que, si deux réseaux $\mathbb{C}/\Lambda$ et $\mathbb{C}/\Lambda'$ sont isomorphes, il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $\lambda\Lambda = \Lambda'$. Si $\Lambda = \Lambda_\tau$ et $\Lambda' = \Lambda_{\tau'}$, cela revient à l'existence de $g_\lambda \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $g_\lambda\tau = \tau'$. Le théorème d'uniformisation, dont nous donnerons la preuve de façon incomplète, s'énonce alors ainsi :

Théorème 2. *La fonction $\mathscr{P}$ vérifie l'équation différentielle suivante, pour $z\in\mathbb{C}$,*
$$(\mathscr{P}'(z;\tau))^2 = 4(\mathscr{P}(z;\tau))^3 - g_2(\tau)\mathscr{P}(z;\tau) - g_3(\tau).$$
Si on note $\mathscr{C}_\tau$ la courbe d'équation $wy^2 = 4x^3 - g_2(\tau)w^2x - g^3(\tau)w^3$, on a un isomorphisme biholomorphe de groupes
$$h_\tau : \mathbb{C}/\Lambda_\tau \to \mathscr{C}_\tau : z \mapsto \begin{cases} (1:\mathscr{P}(z):\mathscr{P}'(z)) & si\ z=0 \\ (0:0:1) & sinon. \end{cases}$$

En outre, toute cubique non singulière est atteinte, et les isomorphismes sont les mêmes des deux points de vue. Plus précisément, si $\lambda\in\mathbb{C}$, et si on définit $\phi_\lambda : \begin{cases} x\mapsto \lambda^2 x \\ y \mapsto \lambda^3 y\end{cases}$, on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}/\lambda\Lambda_\tau \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[d, "h_\tau"] & \mathbb{C}/\Lambda_\tau \arrow[d, "h_\tau"] \\
\mathscr{C}_\tau \arrow[r, "\phi_\lambda"] & \mathscr{C}_\tau
\end{tikzcd}$$

[1]Notons qu'on peut également écrire toute fonction elliptique f sous la forme $f(z) = c\prod_{i=1}^n \frac{\sigma(z-a_i)}{\sigma(z-b_i)}$, où σ est la fonction $\sigma(z) = z\prod_{\omega\in\widetilde{\Lambda}}\left(1-\frac{z}{\omega}\right)\exp\left(\frac{z}{w}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{w^2}\right)$. On a $\zeta = \frac{\sigma'}{\sigma}$.

Enfin, toute bijection algébrique $\mathscr{C}_{g_\lambda\tau}$ et $\mathscr{C}_\tau$ qui respecte la loi de groupe est induite par un isomorphisme $\mathbb{C}/(\lambda\Lambda_\tau) \cong \mathbb{C}/\Lambda_\tau$.

Idée de la preuve.

Pour la première assertion, on utilise le développement en série entière de $\mathscr{P}$, on voit que le quotient des deux membres est holomorphe, donc constant (car elliptique).

L'analycité de h_τ est évidente en $z \neq 0$. En 0, h s'écrit

$$h_\tau : z \mapsto \left(z^3, \mathscr{P}(z), \mathscr{P}'(z)\right).$$

Si $(x, y) \in \mathscr{C}_\tau$, la fonction $\mathscr{P}(z) - x$ a deux zéros $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, vérifiant $z_1 + z_2 \in \Lambda$ et $\mathscr{P}'(z_i) = \pm y$. D'où l'injectivité et la surjectivité. Pour montrer que h_τ est bien un morphisme de groupes, comme il envoie bien le neutre 0 sur le neutre $(0 : 0 : 1)$, il suffit de vérifier que, si trois points sont de somme nulle dans $\mathscr{C}_\tau$, ils sont de somme nulle dans $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$.

La commutation du diagramme résulte essentiellement des formules d'homogénéité

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{P}(z;\tau) & = & \lambda^2 \mathscr{P}(\lambda z; g_\lambda \tau) \\ \mathscr{P}'(z;\tau) & = & \lambda^3 \mathscr{P}'(\lambda z; g_\lambda \tau) \\ G_{2k}(\tau) & = & \lambda^{2k} G_{2k}(g_\lambda \tau). \end{array}\right.$$

Définition 7. *Un diviseur $\Delta \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ d'un tore $\mathbb{C}/\Lambda$ est une combinaison linéaire finie $\Delta = \sum_{u \in \mathbb{C}/\Lambda} m_u(u)$. Son degré est alors $\deg(\Delta) = \sum_{u \in \mathbb{C}/\Lambda} m_u$. Un diviseur principal est un diviseur qui s'écrit $(f) = \sum_{u \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{ord}_u(f)(u)$ avec $f \in \mathscr{M}(\Lambda_\tau)$.*

Le théorème d'Abel-Jacobi permet une autre vision de la courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$.

Théorème 3. *Si on note Div_0 les diviseurs d'ordre 0 et Div_p les diviseurs principaux, le morphisme de $\mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ vers $\mathbb{C}/\Lambda$ $\xi\left(\sum_{u \in \mathbb{C}/\Lambda} m_u(u)\right) = \sum_{u \in \mathbb{C}/\Lambda} m_u.u$ induit*

$$\xi \ : \ \frac{\mathrm{Div}_0(\mathbb{C}/\Lambda)}{\mathrm{Div}_p(\mathbb{C}/\Lambda)} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}/\Lambda.$$

Démonstration. La surjectivité est facile à voir : si $u \in \mathbb{C}/\Lambda$, $u = \xi((U) - (0))$. Ensuite, on a bien $\ker(\xi|_{\mathrm{Div}_0}) = \mathrm{Div}_p$. D'une part, par le lemme ci-dessus, si $f \in \mathscr{M}(\Lambda_\tau)$,

$$\xi\left(\sum_{u \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{ord}_u(f)(u)\right) = \sum_{u \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{ord}_u(f).u = 0 \text{ dans } \mathbb{C}/\Lambda.$$

D'autre part, si $\sum_{u \in \mathbb{C}/\Lambda} m_u.u = 0$, il existe une fonction Λ-périodique telle que $m_u = \mathrm{ord}_u(f)$, qui sera bel et bien elliptique. ☐

2 Uniformisation par les fonctions thêta

2.1 Introduction de la fonction thêta

Les fonctions thêta interviennent dans des domaines très divers des mathématiques [6, 4, 5] : les équations aux dérivées partielles, les fonctions spéciales, les variétés abéliennes... Nous ne pouvons que renvoyer à l'abondante littérature traitant de ce sujet passionnant.

Les fonctions entières Λ_τ-périodiques ne présentant pas beaucoup d'intérêt, il est naturel de chercher des fonctions entières vérifiant une propriété de quasi-périodicité

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(z+1) & = & f(z) \\ f(z+\tau) & = & e^{az+b}f(z). \end{array}\right.$$

En calculant $f(z+\tau+1)$, on constate que $a = 2\pi ik$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Et si on écrit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi inz}$, on trouve que, $\forall n \in \mathbb{Z},\ a_n = a_{n-k}e^{b-2\pi in\tau}$. Une estimation des coefficients montre que le cas $k < 0$ est impossible, le cas $k = 0$ donne simplement la fonction $f(z) = e^{2\pi iz}$. Le cas $k = 1$ nous fournit une fonction $f(z) = a_0\theta(-z - \frac{\tau}{2} - \frac{b}{2\pi i}; \tau)$, où θ est définie ci-après [3].

Définition 8.

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(\pi in^2\tau + 2\pi inz)$$

Il est intéressant de considérer certaines translatées de cette fonction θ.

Définition 9. *Soient $a, b \in \mathbb{C}$, définissons les opérateurs S_b et T_a :*

$$\left\{\begin{array}{c} (S_bf)(z) = f(z+b), \\ (T_af)(z) = \exp\left(\pi ia^2\tau + 2\pi az\right) f(z+a\tau) \end{array}\right.$$

On note $\mathscr{G}$ le groupe engendré par T_a et S_b.
Remarquons qu'on a la relation $S_b \circ T_a = e^{2\pi iab}T_A \circ S_b$.

Proposition 3. *On a un isomorphisme* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{G} & \rightleftarrows & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ U_{(\lambda,a,b)} & \leftarrow & (\lambda, a, b) \end{array}\right.$ *, où*

$$U_{(\lambda,a,b)}f(z) = \lambda e^{\pi ia^2\tau+2\pi az}f(z + a\tau + b),$$

et où $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est muni de la loi de groupe $(\lambda, a, b) \bullet (\lambda', a', b') = (\lambda\lambda' e^{2\pi ia'b}, a + a', b + b')$.

2.2 Translatées de θ et définition du plongement.

On va se limiter à des valeurs particulières de a et b, définissant des sous-groupes de $\mathscr{G}$.

Définition 10.

$$\Gamma = \{(1, a, b) \in \mathscr{G} | a, b, \in \mathbb{Z}\}, \textit{ pour } \ell \in \mathbb{Z}, \ell\Gamma = \{(1, \ell a, \ell b) \in \mathscr{G} | a, b, \in \mathbb{Z}\};$$

$$\begin{array}{rcl} V_\ell & = & \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}) | gf = f(\forall g \in \ell\Gamma)\} \\ & = & \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}) | f(z+\ell) = f(z) \textit{ et } f(z+\tau) = \exp\left(-2\pi i\ell z - \pi i\ell^2\tau\right) f(z)\}. \end{array}$$

Lemme 4. *Pour $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, $f \in V_\ell$ si et seulement si $f(z) = \sum_{n\in\frac{1}{\ell}\mathbb{Z}} c_n e^{\pi in^2\tau+2\pi inz}$, avec $c_m = c_n$ si $m - n \in \ell\mathbb{Z}$. En particulier, $\dim V_\ell = \ell^2$.*

Définition 11. *On note $\mathscr{G}_\ell = \mu_{\ell^2} \times \left(\frac{\frac{1}{\ell}\mathbb{Z}}{\ell\mathbb{Z}}\right)^2$, où μ_{ℓ^2} est le groupe des racines ℓ^2-ièmes de l'unité.*

Alors $\mathscr{G}_\ell$ agit sur V_ℓ : si $f(z) = \sum_{n\in\frac{1}{\ell}\mathbb{Z}} c_n e^{\pi in^2\tau+2\pi inz}$,

$$\left(S_{\frac{1}{\ell}}f\right)(z) = \sum_{n\in\frac{1}{\ell}\mathbb{Z}} \left(c_n e^{\frac{2\pi in}{\ell}}\right) e^{\pi in^2\tau+2\pi inz},$$

$$\left(T_{\frac{1}{\ell}}f\right)(z) = \sum_{n\in\frac{1}{\ell}\mathbb{Z}} c_{n-\frac{1}{\ell}} e^{\pi in^2\tau+2\pi inz}.$$

Lemme 5. *$\mathscr{G}_\ell$ agit irréductiblement sur V_ℓ.*

Démonstration. Soit $\emptyset \neq W$ un sous-espace vectoriel de V_ℓ stable par $\mathscr{G}_\ell$. Il contient donc une fonction $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\pi i n^2\tau + 2\pi i n z}$, avec $c_{n_0} \neq 0$ pour un $n_0 \in \mathbb{Z}$. Les fonctions suivantes sont alors dans W : $\sum_{0\leq p\leq \ell^2-1} e^{-2\pi \frac{n_0 p}{\ell}}(S_{\frac{p}{\ell}} f)(z) = \sum_{n\in\frac{1}{\ell}\mathbb{Z}} c_n \left(\sum_{0\leq p\leq n^2-1} e^{2\pi i(n-n_0)\frac{p}{\ell}} e^{\pi i n^2\tau+2\pi i n z}\right)$, et $\sum_{n\in n_0+\ell\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2\tau+2\pi i n z}$. Enfin, en faisant agir $T_{\frac{i}{\ell}}$, $i \in \frac{1}{\ell}\mathbb{Z}$, $0 \leq i \leq \ell^2-1$, changeant donc n_0 en $n_0 - \frac{i}{\ell}$; on voit que $W = V_\ell$. □

L'action de $\mathscr{G}_\ell$ détermine une base canonique de V_ℓ. Les éléments de cette base sont appelés «fonctions thêta avec caractéristiques».

Définition 12. *Pour $a, b \in \frac{1}{\ell}\mathbb{Z}$,*

$$\theta_{a,b}(z) = S_b T_a \theta(z) = e^{2\pi i a b} T_a S_b \theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\pi i (a+n)^2\tau + 2\pi i (n+a)(z+b)\right)$$

Remarquons que $\theta_{0,0} = \theta$, $S_{b_1}(\theta_{a,b}) = \theta_{a,b+b_1}$, $T_{a_1}(\theta_{a,b,}) = e^{-2\pi i a_1 b}\theta_{a_1+a,b}$ pour $a, b, a_1, b_1 \in \frac{1}{\ell}\mathbb{Z}$ et $\theta_{a+p,b+q} = e^{2\pi i a q}\theta_{a,b}$ si $p, q \in \mathbb{Z}$. Nous voyons donc que les fonctions $\theta_{a,b}$, avec $0 \leq a, b \leq \ell^2 - 1$, forment une base de V_ℓ. Notons cette base $\theta_i, 0 \leq i \leq \ell^2-1$. Soit maintenant $\ell \in \mathbb{Z},\ \ell \geq 2$, posons

$$\phi_\ell : E_\tau \to \mathbb{P}^{\ell^2-1}(\mathbb{C}) : z \mapsto (\theta_0(\ell z) : \ldots : \theta_{\ell^2-1}(\ell z)).$$

Théorème 4. *Cette application $\phi_\ell : E_\tau \to \mathbb{P}^{\ell^2-1}(\mathbb{C})$ est un plongement.*

Démonstration. Les fonctions θ_i étant $\ell\Gamma$-invariantes à un facteur multiplicatif identique près, l'application ϕ_ℓ est bien définie à valeurs dans $\mathbb{P}^{\ell^2-1}(\mathbb{C})$. La suite de la démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 6. *Tout fonction non nulle $f \in V_\ell$ a exactement ℓ^2 zéros modulo $\ell\Lambda_\tau$; en particulier les zéros de $\theta_{a,b}$ dans $\mathbb{C}$ sont $(a+p+\frac{1}{2})\tau + (b+q+\frac{1}{2})$.*

Démonstration. Le nombre de zéros de f dans $\mathbb{C}/\ell\Gamma_\tau$ est le nombre $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$. Mais $\frac{f'(z+1)}{f(z+1)} = \frac{f'(z)}{f(z)}$ et $\frac{f'(z+\tau)}{f(z+\tau)} = \frac{f'(z)}{f(z)} + 2\pi i \ell^2$, d'où la première assertion. Le résultat sur les zéros de $\theta_{a,b}$ découle par translation du résultat pour $\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, qui découle du caractère impair de la fonction. En effet, si $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi i \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2\tau + 2\pi i\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\left(-z+\tfrac{1}{2}\right) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(-m-\frac{1}{2})^2\tau + 2\pi i(-m-\frac{1}{2})(-z+\frac{1}{2})} \\ &= -\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau). \end{aligned}$$

□

Vu les propriétés des fonctions thêta, l'holomorphie de ϕ_ℓ est évidente. On munit ensuite $\mathbb{P}^{\ell^2-1}(\mathbb{C})$ d'une action de $\mathscr{G}_\ell/\mathscr{G}'_\ell$ de telle manière que ϕ_ℓ soit équivariante pour cette action et celle, déjà définie, de $\mathscr{G}_\ell/\mathscr{G}'_\ell$ sur E_τ. Vérifions l'injectivité de ϕ_ℓ : si $z_1, z_2 \in E_\tau$ sont tels que $\phi_\ell(z_1) = \phi_\ell(z_2)$, prenons un élément $0 \neq \frac{a\tau+b}{\ell}$ de $\mathscr{G}_\ell$ tel que $\phi_\ell(z'_1) = \phi_\ell(z'_2)$. Soient $w_1, \ldots, w_{\ell^2-3}$ des points de P distincts modulo $\ell\Lambda_\tau$ de z_1, z_2, z'_1, z'_2. L'espace V_ℓ étant de dimension ℓ^2, il existe une fonction $f \in V_\ell$ s'annulant en $z_1, z_2, w_1, w_2, \ldots, w_{\ell^2-3}$. Mais, puisque $\phi_\ell(z_1) = \phi_\ell(z'_1)$ et $\phi_\ell(z_2) = \phi_\ell(z'_2)$, puisque f s'exprime en fonction des composantes de ϕ_ℓ (*id est* les fonctions thêta), f s'annule également en z'_1 et en z'_2. La fonction f a donc ℓ^2+1 zéros distincts modulo $\ell\Lambda_\tau$, ce qui est une contradiction avec le lemme précédent. La preuve que $\mathrm{d}\phi_\ell(z) \neq 0$ en tout point est strictement analogue.

□

2.3 Fin de la preuve pour $\ell = 2$: relations de Riemann.

Dans le cas $\ell = 2$, on obtient donc une application $E_\tau \to \mathbb{P}^{\ell^2-1}(\mathbb{C})$. Reste à caractériser son image. Par le lemme de Chow, puisque $\phi_2(E_\tau)$ est une sous-variété analytique de $\mathbb{CP}^3$, c'est une sous-variété algébrique. Les relations classiques qui la définissent sont les relations dites de Riemann. Pour les obtenir, on considère une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle que $A^t \cdot A = m^2 I_n$, pour un $m \in \mathbb{N}_0$. Alors, si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}^n$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{m}Ax$, $y \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}^n$. De plus, si $w \in \mathbb{C}^n$ et $z = \frac{1}{m}Aw$, $\sum_{i=1}^n x_i w_i = \sum_{i=1}^n y_i z_i$ et en particulier $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$.

Ici, $m = 2, n = 4$, et on prendra $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 4. *Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4$ et $y = \frac{1}{2}Ax$. On a la formule de Riemann*

$$\begin{array}{rc} & \sum_{a\in\{0,\frac{1}{2}\}} \theta_{a,0}(x_1)\,\theta_{a,0}(x_2)\,\theta_{a,0}(x_3)\,\theta_{a,0}(x_4) \\ + & e^{-\pi i\left(\tau+\sum_{i=1}^4 x_i\right)} \sum_{a\in\{0,\frac{1}{2}\}} \theta_{a,\frac{1}{2}}(x_1)\,\theta_{a,\frac{1}{2}}(x_2)\,\theta_{a,\frac{1}{2}}(x_3)\,\theta_{a,\frac{1}{2}}(x_4) \\ = & 2\theta_{0,0}(y_1)\,\theta_{0,0}(y_2)\,\theta_{0,0}(y_3)\,\theta_{0,0}(y_4)\,, \end{array}$$

où $y_1 = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2}$, $y_2 = \frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{2}$, $y_3 = \frac{x_1-x_2+x_3-x_4}{2}$, $y_4 = \frac{-x_1-x_2-x_3+x_4}{2}$.

Démonstration. Les deux premiers termes du premier membre valent

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^4} \exp\left(\pi i \sum_{i=1}^4 k_i^2 + 2\pi i \sum_{i=1}^4 k_i x_i\right),$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^4} \exp\left(\pi i \sum_{i=1}^4 \left(k_i + k_i^2\right) + 2\pi i \sum_{i=1}^4 k_i x_i\right),$$

les deux suivants

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^4} \exp\left(\pi i\tau \sum_{i=1}^4 \left(k_i + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\pi i \sum_{i=1}^4 x_i.\left(k_i + \frac{1}{2}\right)\right),$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^4} \exp\left(\pi i \sum_{i=1}^4 \left(k_i + \left(k_i + \frac{1}{2}\right)^2\right) + 2\pi i \sum_{i=1}^4 x_i \left(k_i + \frac{1}{2}\right)\right).$$

La somme de ces quatre termes vaut donc

$$2\sum_{k\in\mathcal{D}_2^4} \exp\left(\pi i\tau \sum_{i=1}^4 k_i^2 + 2\pi i \sum_{i=1}^4 x_i k_i\right) = 2\sum_{m\in\mathbb{Z}^4},$$

où $\mathcal{D}_2^4$ est défini ci-après.

Lemme 7. *Si on note $\mathcal{D}_m^n = \left\{x \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}^n \middle| \sum_{i=1}^n x_i \in m\mathbb{Z}^n\right\}$, on a $\mathcal{D}_m^n = \left\{x \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}^n | Ax \in \mathbb{Z}^n\right\}$.*

Si on pose $\ell = \frac{1}{2}Ak$, le premier membre se réécrit

$$2\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^4} \exp\left(\pi i\ell.\ell + 2\pi i y.\ell\right),$$

d'où la proposition. ∎

Le corollaire suivant est immédiat, en utilisant le fait que $\theta_{0,0}, \theta_{0,\frac{1}{2}}, \theta_{\frac{1}{2},0}$ sont paires, et $\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ impaire.

Corollaire 1. *En spécialisant dans la relation de Riemann* (x_1, x_2, x_3, x_4) *par* $(x, x, 0, 0)$ *puis* $(0, 0, x, x)$, *on obtient les formules d'addition*

$$(\theta_{0,0}(x))^2 (\theta_{0,0}(0))^2 = \left(\theta_{0,\frac{1}{2}}(x)\right)^2 \left(\theta_{0,\frac{1}{2}}(0)\right)^2 + \left(\theta_{\frac{1}{2},0}(x)\right)^2 \left(\theta_{\frac{1}{2},0}(0)\right)^2,$$

$$\left(\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x)\right)^2 (\theta_{0,0}(0))^2 = \left(\theta_{0,\frac{1}{2}}(x)\right)^2 \left(\theta_{\frac{1}{2},0}(0)\right)^2 - \left(\theta_{\frac{1}{2},0}(x)\right)^2 \left(\theta_{0,\frac{1}{2}}(0)\right)^2,$$

et, en posant $x = 0$, *l'identité de Jacobi*

$$(\theta_{0,0})^4 = \left(\theta_{0,\frac{1}{2}}(0)\right)^4 + \left(\theta_{\frac{1}{2},0}(0)\right)^4.$$

Maintenant, il reste à voir que $\phi_2(E_\tau)$ est toute la variété définie par ces relations. L'intersection de cette variété avec un hyperplan comporte au plus quatre points. Or, on voit facilement que tout hyperplan $H \equiv \sum_{i=1}^4 a_i x_i$ rencontre $\phi_2(E_\tau)$ en exactement quatre points, solutions $\mod 2\Lambda_\tau$ de $\sum_{i=1}^4 a_i \theta_i(z) = 0$. **Q. E. D.**

3 Fonctions thêta à plusieurs variables

On définit l'analogue du demi-plan de Poincaré pour les matrices

$$\mathscr{S}_n = \{\Omega \in \mathbb{C}^{n\times n} \big| {}^t\Omega = \Omega,\ \Im\Omega{>}0\}.$$

La fonction thêta à n variables est alors définie comme la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n \times \mathscr{S}_n$

$$\theta(z, \Omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_n} \exp(\pi i^t k\Omega n 2\pi i^t kz).$$

(Rappelons qu'en général une fonction du type $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \exp(Q(k) + \ell(k))$, où Q est une forme quadratique et ℓ une forme linéaire, converge si et seulement si $\Re(Q)$ est positive définie.)

De la même manière que pour $n = 1$, on prouve que θ vérifie les propriétés de périodicité attendues :

Proposition 5.

$$\theta(Z + k, \Omega) = \theta(z, \Omega),\ \text{si}\ k \in \mathbb{Z}^n;$$

$$\theta(Z + \Omega k, \Omega) = \exp(-\pi i^t k\Omega k - 2\pi i^t kz)\theta(z, \Omega),\ \text{si}\ k \in \mathbb{Z}^n.$$

On peut également définir des fonctions thêta à plusieurs variables avec caractéristiques : pour $a, b \in \mathbb{Z}^n$,

$$\theta_{a,b}(z, \Omega) = \exp(\pi i^t a\Omega a + 2\pi i^t a(z + b))\theta(z + \Omega a + b, \Omega).$$

On peut ensuite étudier les fonctions de l'ensemble

$$\mathcal{R}_\ell^\Omega = \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n) \big| f \text{ quasi} - \text{périodique de poids } \ell\ :\ \begin{array}{ccc} f(z+k) & = & f(z) \\ f(z+\Omega j) & = & e^{-\pi i\ell^t j\Omega j - 2\pi i\ell^t zj} f(z) \end{array} \}$$

et les utiliser pour uniformiser des variétés abéliennes plus complexes. On a également des généralisation du théorème d'Abel-Jacobi [4, 5].

Références

[1] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie III : Groupes de Lie.* Éléments de mathématiques. Hermann, 1972.

[2] D. Husemoller. *Elliptic Curves.* Number 111 in Graduate texts in mathematics. Springer, 1987.

[3] D. Mumford. *Tata lectures on theta I.* Number 28 in Progress in Mathematics. Birkhäuser, 1983.

[4] G. R. Kempf. *Complex abelian varieties and theta functions.* 1991.

[5] H. E. Rauch. *Elliptic functions, theta functions, and Riemann Surfaces.* The Williams and Wilkins, 1973.

[6] H. McKean, V. Moll. *Elliptic Curves — Function theory, Geometry, arithmetic.* Cambridge University Press, 1997.

[7] J. Levie. Les courbes elliptiques. *Groupe de travail «Actions de groupes» avec Frédéric Paulin*, 2001-2002.